ИЮЛЬ/АВГУСТ

ISSN 0130-2221

2005 · №4

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Головоломка дровосека

Свое название головоломка получила не потому, что ее изобрели лесорубы или она была в их среде особенно популярна. Просто первая игрушка этого типа имела форму топора. А придумал ее в начале XX века американский учитель Рик Квитек.

Показанный здесь вариант на топор совсем не похож. Зато его форма позволяет собрать на одной проволочной модели сразу две головоломки: классическую и усложненную.

Вам понадобится кусок проволоки диаметром 1-4 мм и длиной 30-40 см, кольцо, большая пуговица и несколько бусинок (или шариков). При выборе размеров советуем ориентироваться на клеточки бумаги, на фоне которой изображена игрушка.

Учтите, что пуговица должна быть больше кольца, а бусинки не должны проходить через отверстия проволочной петли. Во втором варианте игрушки одна из бусинок имеет больший диаметр, чем колечко.

Начать поиск решения проще с классической головоломки, показанной на первой фотографии. Задача состоит в том, чтобы освободить колечко. Подсказкой может служить тот факт, что игрушка дровосека относится к типу, который специалисты называют головоломкой с удвоением веревки. Удвоение происходит в момент, когда диск (пуговицу) пропускают внутрь проволочной петли. С этого и начните разгадку. Затем следует передвинуть кольцо, снять его с петли и дважды пропустить внутрь петли, огибая сдвоенную веревку с бусинкой. Легко догадаться, что делать дальше. Если веревочки стали запутываться, значит, вы отклонились от правильного пути.

В первой игрушке один конец веревки прикреплен к проволочной петле, поэтому кольцо можно снять только через противоположный конец шнурка. Во втором случае оба конца свободны, и вам предстоит сначала разобраться, в какую сторону двигаться, чтобы освободить колечко.

А.Калинин

журнал Квант© ИЮЛЬ АВГУСТ 2005 №4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Теоремы существования и основная теорема алгебры. *В.Тихомиров*
7 Сергей Михайлович Никольский (к 100-летию со дня рождения)
8 Метастабильные капли и обледенение самолета. *А.Стасенко*
11 Нанотехнология на службе человека. *Ю.Головин*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

17 Университеты Польши. *А.Васильев*
19 Искусственная шаровая молния. *А.Арутюнов*

ИНФОРМАЦИЯ

18 Лауреаты Всероссийского конкурса школьных учителей физики и математики 2005 года

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

20 Задачи М1961–М1965, Ф1968–Ф1972
21 Решения задач М1936–М1945, Ф1953–Ф1957
26 Кушай яблочко, мой свет!

К М Ш

29 Задачи
30 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
30 Об одном математическом случае. *С.Дворянинов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Неравенства в тетраэдрах

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

35 Неравенства с модулем. *В.Голубев*

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

40 Как береза с горки спустилась. *А.Дубинова*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

42 Катушки индуктивности в электрических цепях. *В.Можаев*
46 Точка внутри окружности. *В.Алексеев, В.Галкин, В.Панферов, В.Тарасов*

ОЛИМПИАДЫ

51 LXVIII Московская математическая олимпиада
53 Избранные задачи Московской физической олимпиады

59 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье «Нанотехнология на службе человека»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Университеты мира на монетах и банкнотах*

Теоремы существования и основная теорема алгебры

В.ТИХОМИРОВ

Математики стали доказывать теоремы существования сравнительно недавно. Быть может, историки математики назовут что-то иное, но мне кажется, что первой «настоящей» теоремой существования была так называемая основная теорема алгебры – теорема Даламбера – Гаусса (во Франции – Даламбера, в Германии и у нас – Гаусса). Согласно этой теореме, каждый многочлен (степени большей или равной единице) с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень. Поясним, что это значит.

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, и их можно найти по формуле

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Если дискриминант $D = \frac{p^2}{4} - q$ неотрицателен, то корни вещественные, в остальных случаях они комплексные. Можно написать сходные формулы для полиномов третьей и четвертой степени, а для полиномов степени выше четвертой таких формул нет – в этом состоит знаменитая теорема Абеля. В «Кванте» №1 за 2003 год помещена моя статья «Абель и его великая теорема», где доказано, например, что уравнение $x^2 - 4x - 2 = 0$ не разрешимо в радикалах (т.е. формулы, подобной приведенной, для корней этого уравнения не существует). И вместе с тем, мы докажем здесь, что это уравнение имеет по меньшей мере один вещественный корень (это и есть теорема существования корня без конкретной формулы для его вычисления). А потом будет доказана и теорема Даламбера – Гаусса.

Начнем же мы с доказательства теоремы Георга Кантора – замечательного математика XIX столетия, основателя теории множеств. Для этого нам понадобятся некоторые сведения о множествах рациональных и вещественных чисел.

Счетность множества рациональных чисел

Счетное множество – это множество, элементы которого можно занумеровать с помощью натуральных чисел, т.е. установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и элементами множества натуральных чисел.

Например, счетно множество всех четных чисел:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\ldots \end{array}$$

Рис. 1

Ясно, что счетно и множество всех целых чисел:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\ldots \end{array}$$

Рис. 2

Покажем, как «пересчитать» все (положительные) рациональные числа. Каждое рациональное число представляется в виде обыкновенной дроби с целым числителем и натуральным знаменателем. Составим таблицу, в которую попадут все рациональные числа:

Числитель / *Знаменатель*	1	−1	2	−2	3	−3	
1	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	…
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	…
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$-\frac{3}{3}$	…
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	…
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Некоторые числа в этой таблице совпадают, но это не страшно.

А теперь будем нумеровать числа в таблице, двигаясь по красным стрелкам (см. следующую страницу). Если на нашем пути встретится число, которое уже занумеровано (например, $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = 1$), мы его просто пропустим. Тем самым, мы получим взаимно однозначное соответствие между множествами всех рациональных и всех натуральных чисел. А это и означает, что множество рациональных чисел счетно:

Числитель / Знаменатель	1	−1	2	−2	3	−3	
1	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	...
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	...
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$-\frac{3}{3}$	...
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	...
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Несчетность отрезка

Докажем знаменитую **теорему Кантора**: *числа отрезка нельзя пересчитать.*

Будем доказывать эту теорему для отрезка $I = [0;\ 1]$. Мы сделаем это двумя способами. Но сначала нам надо уяснить, а что же такое *вещественное число* (хотя мы уже пользовались этим термином).

Определим это понятие не совсем строго: вещественное число – это *бесконечная десятичная дробь*. Чтобы определение было совсем строгим, нужны некоторые уточнения. Мы не будем здесь излагать теорию вещественных чисел со всей подробностью, ограничившись лишь одним свойством этих чисел.[1] Совокупность вещественных чисел x таких, что $a \le x \le b$, где $a < b$, называется отрезком, обозначаемым $[a;\ b]$. Имеет место следующее утверждение. Рассмотрим последовательность вложенных друг в друга числовых отрезков, длины которых стремятся к нулю. Тогда существует и единственно число, содержащееся во всех этих отрезках. Это утверждение называют либо аксиомой полноты, либо аксиомой Кантора, либо леммой о вложенных отрезках.

Перейдем к доказательству теоремы Кантора.

Первое доказательство. Что значит: нельзя пересчитать числа отрезка I? Это значит, что если мы выберем любую последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$ из I, то всегда найдется число из этого отрезка, которое не совпадает ни с одним из этих чисел. Построим такое число. Для этого разделим I на три (для определенности равные) части (рис.1). Точка x_1 не может принадлежать всем трем.

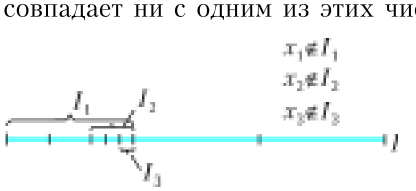


Рис. 1

Пусть I_1 – тот отрезок, которому x_1 не принадлежит. Разделим его опять на три равные части. Точка x_2 не может принадлежать всем этим трем. Пусть I_2 – отрезок, вложенный в I_1, не содержащий x_2. Далее будем поступать совершенно аналогично и построим для любого натурального n отрезок I_n, которому не принадлежит число x_n. Получим последовательность отрезков, вложенных друг в друга, длины которых стремятся к нулю. По лемме о вложенных отрезках им всем принадлежит число ξ, которое по построению не совпадает ни с одним из чисел x_n. Теорема доказана.

Второе доказательство. Предположим, что нам удалось занумеровать все числа отрезка – бесконечные десятичные дроби. Запишем их в столбик одно под другим:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}\,\alpha_{15}\ldots, \\ a_2 &= 0,\alpha_{21}\,\alpha_{22}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}\,\alpha_{25}\ldots, \\ a_3 &= 0,\alpha_{31}\,\alpha_{32}\,\alpha_{33}\,\alpha_{34}\,\alpha_{35}\ldots, \\ a_4 &= 0,\alpha_{41}\,\alpha_{42}\,\alpha_{43}\,\alpha_{44}\,\alpha_{45}\ldots, \\ a_5 &= 0,\alpha_{51}\,\alpha_{52}\,\alpha_{53}\,\alpha_{54}\,\alpha_{55}\ldots, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Здесь α_{ij} – j-я цифра числа a_i. А теперь рассмотрим число $b = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\ldots$, у которого $\beta_1 \ne \alpha_{11}$, $\beta_2 \ne \alpha_{22}$, $\beta_3 \ne \alpha_{33}$, $\beta_4 \ne \alpha_{44}$ и т.д. Это – вещественное число. Но это не a_1, потому что его первая цифра не совпадает с первой цифрой a_1; это не a_2, потому что его вторая цифра не совпадает со второй цифрой a_2; это не a_n, так как его n-я цифра не совпадает с n-й цифрой числа a_n. Значит, это число мы не занумеровали. Противоречие.

Сделаем короткое отступление. В качестве следствия из доказанной теоремы обнаружилось существование *иррациональных чисел*. Действительно, рациональные дроби можно пересчитать, и, значит, по доказанной теореме существует число, не являющееся рациональным, т.е. иррациональное число существует!

Вспомним, что впервые факт существования иррациональных чисел был осознан в Древней Греции (это приписывают Пифагору). А именно, тогда было доказано, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число, что нет никакой дроби, квадрат которой равен двум. А мы доказали существование иррационального числа без явного его указания.

Существование трансцендентных чисел

Трансцендентное число – это число, не являющееся алгебраическим. А что такое алгебраическое число? *Алгебраическим* называется число, являющееся корнем многочлена с целыми коэффициентами. Например, $\sqrt{2}$ – корень многочлена $x^2 - 2$ – алгебраическое число; алгебраическим числом является и вещественный корень уравнения $x^5 - 4x - 2 = 0$, о котором речь шла выше. Встает вопрос: а не все ли числа вообще являются алгебраическими?

Впервые явно построил неалгебраическое число Лиувилль в 1844 году. Он доказал, что число $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ не является алгебраическим. Доказательство этого базируется на теории приближений чисел рациональными числами, и оно весьма непросто. А мы докажем, что трансцендентные числа существуют (и ряд сопутствующих результатов) по-другому, совсем несложно.

Существование трансцендентных чисел (так же, как и существование иррациональных чисел) следует из

[1] *Вещественные числа имеют геометрическую модель – прямую, и потому мы зачастую числа будем называть точками.*

доказанной выше теоремы Кантора. Для этого пересчитаем, т.е. выпишем в строчку $a_1, a_2, \ldots$ все алгебраические числа. Сделать это можно так же, как мы пересчитывали рациональные числа, только в несколько «ходов».

Занумеруем сначала все многочлены первой степени, они представляются в виде $a_1x + a_0$. Для этого составим такую таблицу:

a_1 \ a_0	0	1	−1	2	−2	3	−3	…
1	x	$x+1$	$x-1$	$x+2$	$x-2$	$x+3$	$x-3$	…
2	$2x$	$2x+1$	$2x-1$	$2x+2$	$2x-2$	$2x+3$	$2x-3$	…
3	$3x$	$3x+1$	$3x-1$	$3x+2$	$3x-2$	$3x+3$	$3x-3$	…
4	$4x$	$4x+1$	$4x-1$	$4x+2$	$4x-2$	$4x+3$	$4x-3$	…
5	$5x$	$5x+1$	$5x-1$	$5x+2$	$5x-2$	$5x+3$	$5x-3$	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Будем нумеровать наши многочлены, двигаясь по стрелкам:

a_1 \ a_0	0	1	−1	2	−2	3	−3	…
1	x	$x+1$	$x-1$	$x+2$	$x-2$	$x+3$	$x-3$	…
2	$2x$	$2x+1$	$2x-1$	$2x+2$	$2x-2$	$2x+3$	$2x-3$	…
3	$3x$	$3x+1$	$3x-1$	$3x+2$	$3x-2$	$3x+3$	$3x-3$	…
4	$4x$	$4x+1$	$4x-1$	$4x+2$	$4x-2$	$4x+3$	$4x-3$	…
5	$5x$	$5x+1$	$5x-1$	$5x+2$	$5x-2$	$5x+3$	$5x-3$	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…

У каждого из этих многочленов есть один корень; все эти корни, тем самым, получили свои номера.

Многочлены второй степени представляются в виде

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2x^2 + P(x),$$

где $P(x) = a_1x + a_0$ – многочлен первой степени, уже получивший какой-то номер. Поступим с многочленами второй степени так же, как с многочленами первой степени:

a_2 \ $P(x)$	0	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	…
0	0	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	…
1	x^2	$x^2+P_1(x)$	$x^2+P_2(x)$	$x^2+P_3(x)$	$x^2+P_4(x)$	…
2	$2x^2$	$2x^2+P_1(x)$	$2x^2+P_2(x)$	$2x^2+P_3(x)$	$2x^2+P_4(x)$	…
3	$3x^2$	$3x^2+P_1(x)$	$3x^2+P_2(x)$	$3x^2+P_3(x)$	$3x^2+P_4(x)$	…
4	$4x^2$	$4x^2+P_1(x)$	$4x^2+P_2(x)$	$4x^2+P_3(x)$	$4x^2+P_4(x)$	…
…	…	…	…	…	…	…

Тем самым, все многочлены второй степени занумерованы, а значит, занумерованы и их корни.

Продолжая этот процесс, мы занумеруем все многочлены третьей степени, четвертой, …, n-й – и в конце концов придем к нумерации всех вообще многочленов и, следовательно, всех алгебраических чисел.

Итак, алгебраические числа пересчитаны, и из доказательства теоремы Кантора о несчетности отрезка следует доказательство существования трансцендентных чисел.

На протяжении десятилетий (да и поныне это случается) во многих статьях и книгах противопоставляют конструктивное предъявление Лиувиллем трансцендентного числа «неконструктивному» доказательству Кантора. Но это – заблуждение. Наше доказательство может быть сделано совершенно конструктивным. Нетрудно составить компьютерную программу, которая реализует канторовскую процедуру и которая шаг за шагом выписывает десятичные знаки неалгебраического числа.

Теперь от чисел перейдем к математическому анализу.

Теорема Коши о промежуточном значении и существование вещественного корня у вещественного многочлена нечетной степени

Теорема Коши о промежуточном значении гласит: *непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения*. Это означает, что если непрерывная функция принимает два разных значения, то она принимает и любое промежуточное значение.

График непрерывной функции (говоря снова не очень строго) обладает тем свойством, что он может быть нарисован, не отрывая карандаша от бумаги. А точное определение таково. Говорят, что функция f непрерывна в точке $\bar{x}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что если $|x - \bar{x}| < \delta$, то $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$. Функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна в каждой точке отрезка. Из этого определения сразу следует, что если непрерывная функция в какой-то точке не равна нулю, то она сохраняет знак на некотором интервале (или полуинтервале, если точка концевая), содержащем эту точку. Нам понадобится только это свойство.

Теорема Коши тривиально сводится к следующему утверждению: непрерывная на отрезке функция, принимающая на концах значения разных знаков, принимает на этом отрезке нулевое значение (рис.2).

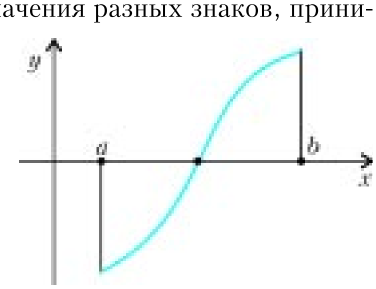


Рис. 2

Докажем теорему Коши в этой форме, «ловя» корень функции методом «деления пополам». Поделим отрезок пополам. Если ноль в середине отрезка, все доказано. Если же в середине не ноль, то на концах одного из отрезков функция принимает значения разных знаков. Делим его пополам и так далее. В точке ξ, принадлежащей по лемме о вложенных отрезках всем отрезкам (если мы не наткнемся по ходу дела на ноль), функция (из-за свойства сохранения знака) принимает нулевое значение. Теорема Коши, тем самым, доказана.

Из теоремы Коши почти сразу следует результат о многочленах нечетной степени. Действительно, любые многочлены – непрерывные функции на всей вещественной прямой. Пусть $f(x)=x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots$ $\ldots+a_{2n}x+a_{2n+1}$ – многочлен нечетной степени. Тогда при положительных x получаем

$$\left|f(x)\right|=x^{2n+1}\left|1+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right|,$$

что при достаточно больших x больше $\frac{x^{2n+1}}{2}$, т.е. $f(x)$ – положительное число. Аналогично доказывается, что при достаточно малых x $f(x)$ – отрицательное число. Значит, по теореме Коши о промежуточном значении f имеет ноль. Вот и все.

Отметим еще одно следствие из теоремы Коши: *непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку* (или: если f – вещественная функция, заданная на $[a;\ b]$, $a<b$, и при этом $a\le f(x)\le b$ для всех x, то существует точка $\hat{x}$ из этого отрезка такая, что $f(\hat{x})=\hat{x}$). Докажите это самостоятельно.

Теорема Вейерштрасса о достижении экстремума функции, непрерывной на отрезке

Очень широкие приложения в математике имеют разнообразные обобщения теоремы Вейерштрасса о том, что *непрерывная на отрезке функция достигает на нем своего минимального и максимального значения.*

Докажем эту теорему. Пусть f непрерывна на некотором отрезке, для определенности на том же отрезке $I=[0;\ 1]$. Прежде всего докажем, что f ограничена на I. Допустим, что это не так и f принимает на I сколь угодно большие положительные значения. Тогда для любого натурального n найдется на I точка x_n такая, что $f(x_n)>n$. На I мы построили бесконечное множество точек. Разделим отрезок пополам. На одном из двух отрезков останется бесконечное множество точек. Его разделим пополам и так далее. И снова по лемме о вложенных отрезках существует точка, принадлежащая всем отрезкам. Из определения непрерывности следует, что на малом интервале, содержащем эту точку, функция f ограничена, что противоречит построению этой точки.

Мы доказали, что f ограничена сверху. Пусть f не достигает своего максимума. Это означает, что существует число M такое, что $f(x)>M$ для всех x из I, и вместе с тем она принимает значения как угодно близкие к M. Найдем теперь по натуральному m точку y_m такую, что $f(y_m)>M-\frac{1}{m}$. Снова построено бесконечное множество точек. И снова делим отрезок пополам и поступаем как только что, когда доказывали ограниченность. Найдем, как и там, точку η, принадлежащую всем отрезкам. По построению и из определения непрерывности следует, что $f(\eta)$ не может быть ничем иным как M. Аналогично доказывается результат и о достижении минимума. Теорема Вейерштрасса доказана.

Обобщения этой теоремы на случай функций двух переменных окажется достаточным для доказательства основной теоремы алгебры.

Обобщение теоремы Вейерштрасса

Рассмотрим функцию двух переменных $f=f(x_1,x_2)$, где x_1 и x_2 – вещественные числа. Примером функции двух переменных является функция $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ – расстояние от точки плоскости с координатами (x_1,x_2) до начала координат. Расстояние $d\left((x_1,x_2),(x_1',x_2')\right)$ между двумя точками (x_1,x_2) и (x_1',x_2') на плоскости задается формулой $\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2}$. Функция f двух переменных называется непрерывной в точке $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, если для любого $\varepsilon>0$ можно найти число $\delta>0$ такое, что если $d\left((x_1,x_2),(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\right)<\delta$, то $\left|f(x_1,x_2)-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\right|<\varepsilon$. Функция называется непрерывной на квадрате $\max\left(|x_1|,|x_2|\right)\le a$, если она непрерывна в каждой точке этого квадрата.

Нужное нам обобщение теоремы Вейерштрасса гласит: *непрерывная на квадрате функция достигает на нем своего минимального и максимального значения.* Доказательство этой теоремы фактически не меняется, только квадрат придется делить на четыре части.

И теперь доказательство основной теоремы алгебры сложится из двух частей, как и доказательство теоремы о многочленах нечетной степени. В первой части мы фактически повторим проведенное там рассуждение, доказав, что модуль многочлена достигает своего минимума. А далее вместо теоремы Коши о промежуточном значении воспользуемся леммой Даламбера. Но мы несколько забежали вперед.

Основная теорема алгебры

Прежде всего надо построить комплексную плоскость. Формально введем «число» i, квадрат которого равен -1. Этому числу нет места на вещественной прямой, его располагают на плоскости. Проведем на плоскости две прямые: одну – горизонтальную (ее объявляют вещественной), другую – перпендикулярную ей, проходящую через начало координат вертикальную прямую (ее объявляют мнимой прямой). Число i, находящееся на мнимой прямой в верхней полуплоскости на расстоянии 1, называют мнимой единицей.

Таким образом, числу 1 сопоставляется вектор $(1,\ 0)$, а числу i – вектор $(0,\ 1)$. Точке (a,b) плоскости сопоставляется комплексное число $z=a+bi$. Комплексные числа можно складывать и умножать по естественным правилам, как и в вещественном случае: если $z=a+bi$, $z'=a'+b'i$, то $z+z'=(a+a')+(b+b')i$, $zz'=$ $=(a+bi)(a'+b'i)=aa'-bb'+(ab'+a'b)i$. Расстояние от точки $z=a+bi$ до нуля (т.е. число $\sqrt{a^2+b^2}$) называется модулем числа z и обозначается $|z|$. Полином степени n – это выражение вида $p(z)=a_0z^n+$

$+ a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Коэффициенты a_k предполагаются комплексными (в частности, вещественными) числами. Полином $z^2 - 2$ имеет два вещественных корня $\pm\sqrt{2}$, полином $z^2 + 1$ – два чисто мнимых корня $\pm i$, а полином $iz + 1$ имеет один корень i.

Основная теорема алгебры: *многочлен степени $n \geq 1$ имеет комплексный корень.*

Начнем с короткого комментария. Основная теорема алгебры принадлежит к числу известнейших и безусловно самых значительных результатов в математике. Ей посвящен, в частности, цикл статей первого номера третьей серии альманаха «Математическое просвещение» (1997 г.). Процитирую первый абзац вступительной статьи в первом номере: «Впервые основная теорема алгебры была сформулирована в XVII веке Жираром (1629), а затем Декартом в его знаменитой «Геометрии», изданной в 1637 г. ... Вот как формулирует Декарт эту теорему: «Знайте, что в каждом уравнении может быть столько корней, какова его степень. ... Но иногда случается, что некоторые из этих корней ложны [так Декарт называет отрицательные числа], или даже меньше, чем ничто [здесь речь идет о комплексных корнях]».

Попытку доказать основную теорему алгебры предпринимали Эйлер и Даламбер. Основная идея рассуждения Даламбера будет приведена далее, однако его доказательство было неполным. Гаусс предложил четыре доказательства основной теоремы. Ни одно из них не может считаться удовлетворительным с нынешней точки зрения, ибо во всех его доказательствах присутствуют (без надлежащей аргументации) утверждения типа теоремы Коши о промежуточном значении. В одном из самых замечательных доказательств Гаусс сводит основную теорему к доказанному нами факту существования вещественного корня у вещественного нечетного полинома, (см. это доказательство в учебнике А.Г.Куроша «Курс высшей алгебры», § 55). Этот факт Гаусс считал очевидным, и на самом деле он таков, но для его строгого доказательства необходимо было построить теорию вещественных чисел.

А теперь переходим к доказательству основной теоремы.

Пусть $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ – полином степени n с комплексными коэффициентами ($n \geq 1$), у которого $a_n \neq 0$. Рассмотрим вещественную функцию двух переменных $f(z) = |p(z)|$. Она непрерывна (докажите!). Покажем, что эта функция «растет на бесконечности» (это показывается точно так же, как ранее для нечетного полинома). Действительно,

$$f(z) = |a_n||z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^{n-1}}\right|.$$

Если величина $|z|$ достаточно велика, то модуль величины $\frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^{n-1}}$ меньше $\frac{1}{2}$, и, значит, $f(z) \geq \frac{|a_n||z|^n}{2}$, так что (при достаточно большом $|z| = R$) $f(z)$ станет больше $f(0)$. Отсюда следует, что минимум функции f не может достигаться вне круга радиуса R с центром в нуле и, тем более, вне любого квадрата с центром в нуле, содержащего этот круг.

Но по теореме Вейерштрасса (для квадрата) непрерывная функция f должна достигать минимума в таком квадрате. Пусть это будет число $\hat{z}$. Не ограничивая себя в общности, можно считать, что $\hat{z} = 0$ (иначе сделаем замену от z к $z - \hat{z}$). Итак, пусть f достигает минимума в нуле.

Если $f(0) = 0$, то все доказано. Оказывается, что случай $f(0) > 0$ невозможен.

Лемма Даламбера: *минимум модуля алгебраического полинома степени $n \geq 1$, достигающийся в нуле, не может быть отличным от нуля.*

Действительно, пусть a_k – первый после нулевого отличный от нуля коэффициент полинома $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ (мы предположили, что $f(0) = |a_0| > 0$, т.е. $a_0 \neq 0$). Возьмем одно из решений уравнения $a_0 + a_k z^k = 0$ (это один из корней k-й степени из числа $-a_0 a_k^{-1}$). Обозначив это число через ζ, а $t a_{k+1} \zeta^{k+1} + \ldots$ $\ldots + t^{n-k} a_n \zeta^n$ – через $g(t)$, получим тогда

$$|p(t\zeta)| = \left|a_0 + a_k t^k \zeta^k + a_{k+1} t^{k+1} \zeta^{k+1} + \ldots + a_n t^n \zeta^n\right| =$$

$$= \left|a_0 - t^k \left(a_0 + g(t)\right)\right| < |a_0| = |p(0)|,$$

ибо при малых $t > 0$ $|g(t)| < \frac{|a_0|}{2}$ (рис.3). Получили противоречие. Теорема доказана.

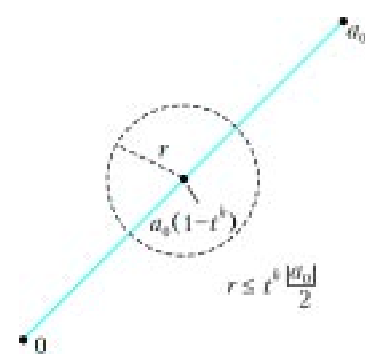
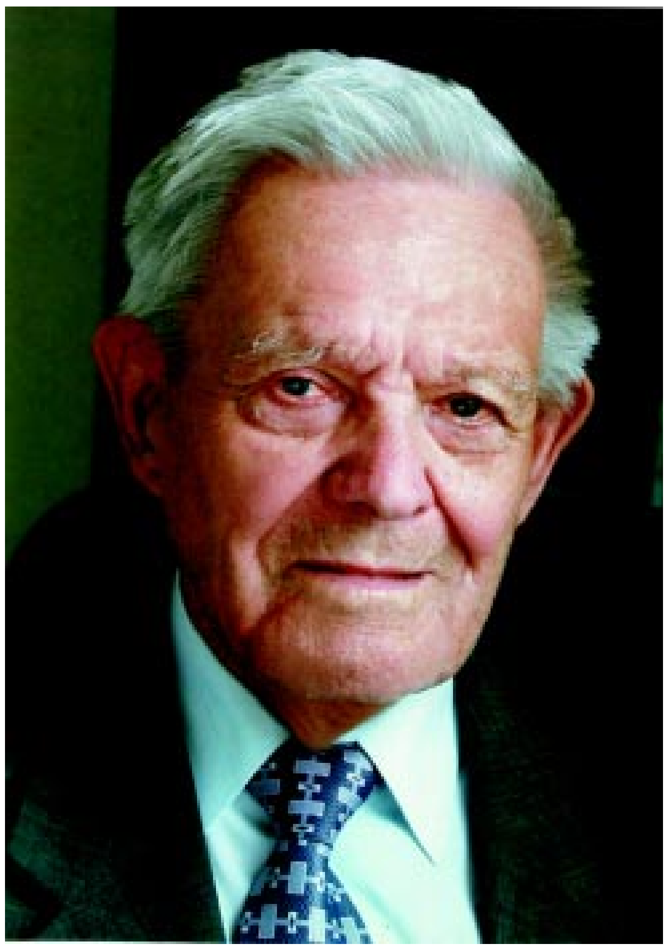


Рис. 3

И в заключение одно замечание. Я назвал основную теорему алгебры теоремой Даламбера – Гаусса, воздавая дань двоим великим математикам. Обоим не хватило для того, чтобы мы с вами признали их доказательства безупречными, самой малости: один считал очевидным, что модуль квадрата полинома достигает своего минимума, другой – что вещественный полином нечетной степени имеет вещественный ноль. Но это и на самом деле очевидно, не так ли?

Сергей Михайлович Никольский

30 апреля 2005 года математическая общественность нашей страны отметила вековой юбилей выдающегося математика и замечательного человека – Сергея Михайловича Никольского. Свою столетнюю годовщину юбиляр встретил преисполненным творческой и общественной активности, что представляет собой явление беспрецедентное.



Сергей Михайлович, рассказывая о своей жизни, называл имена трех людей, оказавших на него наибольшее влияние. Это его отец Михаил Дмитриевич Никольский, его учитель Андрей Николаевич Колмогоров и его близкий друг Анатолий Иванович Мальцев.

Михаил Дмитриевич Никольский имел благородную профессию – он был лесничим, и детство Сергея Михайловича прошло на природе среди полей и прекрасных лесов. На всю жизнь сохранились в его памяти огромные, неохватные и прямые, как мачты, дубы знаменитого Шипова леса в поселке Красный Кордон Воронежской губернии.

Сергей Михайлович Никольский закончил Днепропетровский университет. В тридцатые годы в Днепропетровск как-то приехали Андрей Николаевич Колмогоров и Павел Сергеевич Александров. Андрей Николаевич читал лекции по теории аппроксимаций, и С.М.Никольский был одним из наиболее активных слушателей. В 1934 году Днепропетровский университет командировал его в аспирантуру в Московский университет. Это были замечательные годы в истории Московского университета, годы расцвета московской математической школы. Рождались многие новые научные направления.

В 1933 году вышел перевод на французский язык книги выдающегося польского математика Стефана Банаха «Теория линейных операций» – основополагающего труда по функциональному анализу. Одну книгу прислали А.Н.Колмогорову для рецензирования, еше одну передали в библиотеку Московского университета. В 1934 году увидели свет две классические работы: А.Н.Колмогорова, где впервые были определены топологические векторные пространства, сыгравшие огромную роль в исследовании обобщенных функций, и Л.А.Люстерника, перенесшего на бесконечномерный случай одну из самых фундаментальных теорем дифференциального исчисления – теорему о неявных функциях. В те же годы у Колмогорова появились два ученика, которые стали активно работать в новом научном направлении, – Израиль Моисеевич Гельфанд и Сергей Михайлович Никольский. Сергей Михайлович почти все время проводил в библиотеке Московского университета, штудируя книгу Банаха и другие работы, активно участвовал в семинарах. И Гельфанд, и Никольский в 1935 году защитили свои кандидатские диссертации – первые по функциональному анализу. Обе были выдающимися. Основной результат диссертации Никольского оказался классическим, он вошел в учебники и упоминается в любом обзоре по теории операторов. Можно только поражаться такому стремительному развитию науки в те годы!

Защитив диссертацию, Сергей Михайлович возвращается в Днепропетровск, но его связи с научным руководителем не обрываются. Он начинает новый цикл исследований, инициированный Колмогоровым: его интересы склоняются к теории приближений функций полиномами. В 1940 году Никольский вновь приезжает в Москву и поступает в докторантуру Математического института им. В.А.Стеклова. Перед началом Великой Отечественной войны Сергей Михайлович представляет своему учителю итоги своей деятельности в докторантуре – отпечатанную на машинке в одном экземпляре докторскую диссертацию. 22 июня 1941 года началась война. Сергей Михайлович вместе с институтом эвакуировался в Казань, Колмогоров еще оставался в Москве. 16 октября 1941 года – в один из самых трагических дней в истории нашей столицы (немцы рвались к Москве) – Колмогоров в очень драматической и нервной обстановке, имея возможность взять с собой только самое необходимое, садится в поезд, отправляющийся вглубь России. Среди этого самого необходимого в чемодане Андрея Николаевича лежала диссертация Сергея Михайловича. Прибыв в Казань и возвращая автору его диссертацию, Колмогоров дал высокую оценку этой работе и рекомендовал ее к защите. В 1942 году в Казани Сергей Михайлович защищает докторскую диссертацию, а через два года получает профессорское звание. В предвоенные годы и в казанский период сложились тесные дружеские связи двух учеников А. Н. Колмогорова, двух его докторантов – С.М.Никольского и А.И.Мальцева.

В пятидесятые годы С.М.Никольский начинает еще один цикл своей творческой деятельности. Он разрабатывает новый подход к теории вложения и применения этой теории к дифференциальным уравнениям. И в теории приближений, и в теории вложения Сергей Михайлович Никольский занимает лидирующее положение в математическом мире.

Сергей Михайлович Никольский служил и поныне служит математике и математическому просвещению на многих поприщах. До войны он преподавал в Днепропетровском университете. С 1941 года Сергей Михайлович работает в «Стекловке», где с 1953 по 1961 год он был заместителем директора, а с 1961 по 1989 год – заведующим отделом теории функций.

Много лет Сергей Михайлович возглавлял редакцию журнала «Труды Математического института им.В.А.Стеклова», был главным редактором реферативного журнала «Математика». Он много преподавал в Москве – в Московском университете, в Московском автодорожном институте, но больше всего – в Московском физико-техническом институте. Свою связь с МФТИ и МГУ он сохраняет и сегодня. Перу С.М.Никольского принадлежит множество замечательных монографий и учебников. Его учебник по математическому анализу, написанный совместно с его учеником Я.С.Бугровым, был удостоен Государственной премии. Хорошо известны учебники «Арифметика 5», «Арифметика 6», «Алгебра 7–9», созданные С.М.Никольским совместно с М.К.Потаповым, Н.Н.Решетниковым и А.В.Шевкиным. Очень большое внимание Сергей Михайлович уделяет сегодня проблемам математического образования.

Активнейшая творческая деятельность Сергея Михайловича Никольского продолжается.

Здоровья, радостей, жизненных и творческих удач Вам, Сергей Михайлович!

Метастабильные капли и обледенение самолета

А.СТАСЕНКО

Шел 1721 год. Даниэль Габриэль Фаренгейт наполнил водой стеклянный шар (около дюйма в диаметре) с выводной трубкой (в 2–3 дюйма длиной), затем вскипятил воду, быстро запаял выводную трубку и выставил шар на ночь на пятнадцатиградусный мороз. Утром следующего дня он обнаружил воду в шаре... в жидком состоянии! Но как только он отломил запаянный конец выводной трубки, чтобы вылить воду, вода очень быстро замерзла. Сначала экспериментатор приписал это явление действию проникшего воздуха, но позднее заметил, что замерзание воды происходит от сотрясения, например при встряхивании запаянного шара.

Описанное состояние переохлажденной жидкости было названо *метастабильным.* Это означает, что при выполнении определенных условий оно относительно устойчиво (стабильно). Если же эти условия нарушены, переохлажденная жидкость отвердевает, т.е. переходит в более устойчивое состояние (аналогично тому, как конденсируется пересыщенный пар) – конечно, с выделением теплоты фазового превращения.

В облаках капли воды остаются в жидком состоянии при температуре –40 °С в течение часов и даже суток. (А в лабораторных условиях удается получить жидкую воду, охлажденную ниже –70 °С.) И когда самолеты стали летать все выше и выше и попадать в переохлажденные облака, пилоты столкнулись с новым грозным явлением – обледенением летательного аппарата. Вот, например, что происходило во время исторического перелета В.Чкалова, Г.Байдукова и А.Белякова через Северный полюс в США (июнь 1937 г.):

«Первый контакт со стихией начинается над Кольским полуостровом... Появляются первые признаки обледенения: стекла пилотской кабины становятся матовыми. Начинается тряска. Белая облачная муть... Не видны концы крыльев. Обледенение усиливается. Оно охватывает винт... Второй циклон встречает экипаж через несколько часов в Баренцевом море. Облака встают перед самолетом стеной... Все еще тяжело загруженный горючим «СССР NO-25» буквально заползал на новые метры высоты, обрастая ледяной коркой и готовый в любую минуту свалиться в пропасть».

К счастью, этот перелет кончился триумфом. Многим другим экипажам повезло меньше.

Попробуем разобраться в описанном явлении с физической точки зрения. Прежде всего, выясним, почему капли воды в облаках остаются жидкими, несмотря на охлаждение ниже точки замерзания. Ведь все знают, что вода в бутылке или ведре, выставленная на мороз, превращается в лед. Оказывается, дело в том, что для замерзания недостаточно переохлаждения. Нужны еще ядра кристаллизации (точно так же, как для конденсации пересыщенного пара нужны ядра конденсации). Этими ядрами могут быть и молекулы самой воды, которые выстроились в определенном порядке, – но это процесс случайный и тем менее вероятный, чем меньше переохлаждение. А вот если есть мельчайшие частицы какой-либо примеси (нанопылинки, нанокристаллики солей и т.п.), то на них начинается рост кристалла воды и при малом переохлаждении. Но появление пылинки в капле тоже тем менее вероятно, чем мельче капля. Действительно, если, например, в пироге содержится k изюминок и вы разрезали пирог на k частей, то средняя вероятность встретить изюминку в наугад выбранном куске равна единице. А если разрезать пирог на $1000k$ кусков, то возможность изюминке попасть в данный кусок – уже одна тысячная. А если на миллион, на миллиард..?

Поскольку капли воды в облаках имеют размеры порядка одного – десяти микрометров, то на всех просто не хватает посторонних (гетерогенных) ядер конденсации. Вот капли и висят в облаках, будучи переохлажденными гораздо ниже 0 °C. Но если ударит гром (звуковая волна) или пролетит самолет, с поверхностью которого они столкнутся, тут встряска заставит их вспомнить, что уже давно пора кристаллизоваться. Нет, не напрасно Фаренгейт кипятил воду перед замораживанием – он удалял гетерогенные ядра конденсации. (Кстати, это тот самый Фаренгейт, который предложил известную температурную шкалу. Ею до сих пор пользуются в англоязычных странах.)

И тут мы подошли вплотную к описанию обледенения крыла самолета. Эксперименты и расчеты показывают, что наледь имеет две характерные формы (рис.1). Дело не только в том, что при этом летательный аппарат просто тяжелеет, – главное в том, что портится профиль крыла, этого важнейшего элемента летательного аппарата, заботливо рассчитанного теоретиками и испытанного экспериментаторами в аэродинамических трубах. Наличие посторонних «нашлепок» может привести к срыву потока воздуха уже вблизи передней кромки крыла и резкому уменьшению его подъемной силы. Вот почему наш доблестный экипаж боялся «свалиться в пропасть».

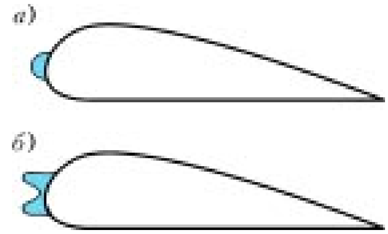


Рис. 1

Представим себе переднюю кромку крыла в виде цилиндрической поверхности, на которую уже намерз слой толщиной h (рис.2). Вообще говоря, толщина слоя зависит от координаты θ точки на поверхности цилиндра. Более того, и угол наклона α внешней поверхности ледяного слоя по отношению к поверхности цилиндра тоже может быть разным. Поэтому векторы нормали $\vec{N}$ и касательной $\vec{\tau}$ к этой внешней поверхности не совпадают с соответствующими векторами $\vec{N}_0$ и $\vec{\tau}_0$ при отсутствии обледенения, а повернуты на угол α.

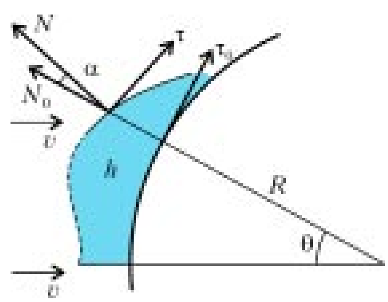


Рис. 2

Будем предполагать, с одной стороны, что капли достаточно крупные, так что можно пренебречь искривлением их траекторий при подлете к нашему цилиндру. Следовательно, угол их падения на внешнюю поверхность слоя льда равен $\theta + \alpha$, а нормальная составляющая скорости удара равна $v\cos(\theta+\alpha)$. Далее, если в невозмущенной атмосфере концентрация микрокапель равна n, а масса каждой капли m, то поток массы капель на единицу поверхности слоя льда равен $nmv\cos(\theta+\alpha)$. Обозначим $nm = \rho_\infty$, где ρ_∞ – это объемная массовая плотность микрокапель, или, как говорят метеорологи, водность атмосферы.

С другой стороны, будем считать капли достаточно малыми, так что при ударе о твердую поверхность они не дробятся, а мгновенно примерзают к ней.

Итак, за время Δt на единицу поверхности выпадет масса $\rho_\infty v\cos(\theta+\alpha)\cdot\Delta t$, которая превратится в слой льда толщиной Δh с плотностью $\rho_л$. Отсюда получим, что скорость роста толщины слоя будет равна

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\rho_\infty v\cos(\theta+\alpha)}{\rho_л}. \qquad (1)$$

Для оценки примем значение водности $\rho_\infty = 1$ г/м^3, плотности льда – $\rho_л = 900$ кг/м^3, а скорости – $v = 100$ м/с. Тогда получим

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{10^{-3}\ \text{кг/м}^3}{900\ \text{кг/м}^3}\, 100\ \text{м/с}\cdot\cos(\theta+\alpha) \le 10^{-4}\ \text{м/с} = 0{,}1\ \text{мм/с}.$$

Значит, за десять секунд полета в облаке на цилиндре нарастет слой льда толщиной 1 мм, за сто секунд – 1 см, за тысячу секунд…

И что же, этот процесс будет продолжаться, пока наш цилиндр движется в облаке или пока не упадет самолет, который моделируется этим цилиндром? Чтобы ответить на этот вопрос, учтем еще один факт. А именно – при отвердевании каждой капли, примерзшей к крылу, выделяется теплота кристаллизации (или теплота плавления). Кроме того, каждая единица массы капель несет кинетическую энергию $v^2/2$. А еще можно учесть, что температура капель изменяется от температуры в облаке T_∞ до температуры внешней поверхности слоя $T_{\text{п}}$, которая пока что неизвестна.

Таким образом, на каждом квадратном метре внешней поверхности слоя выделяется в секунду энергия, равная

$$\rho_\infty v\cos(\theta+\alpha)\cdot\left(\lambda+\frac{v^2}{2}+c_{\text{л}}\left(T_\infty-T_{\text{п}}\right)\right),$$

где λ и $c_{\text{л}}$ – удельная теплота кристаллизации воды (плавления льда) и удельная теплоемкость льда соответственно.

А куда девается эта теплота? Конечно, часть ее идет на подогревание слоя льда, часть уносится потоком воздуха (в пограничном слое), часть проникает внутрь слоя – в сторону крыла (к поверхности цилиндра), имеющего температуру $T_{\text{кр}}$. Для того чтобы найти плотность потока тепла q внутрь слоя льда, используем определение коэффициента теплопроводности χ:

$$q=\chi\frac{T_{\text{п}}-T_{\text{кр}}}{h}.$$

Смысл этого выражения прост: плотность потока тепловой энергии в неподвижном слое толщиной h пропорциональна разности температур на поверхностях этого слоя и обратно пропорциональна толщине слоя. А коэффициент пропорциональности и есть коэффициент теплопроводности. Его значение можно найти в физическом справочнике.

Далее, примем еще такие упрощающие предположения. Будем считать, что поверхность цилиндра имеет ту же температуру, что и облако, – ведь поверхность крыла, не покрытая слоем льда, гораздо больше, чем обледеневшая, а теплопроводность металла велика. Иными словами, пусть $T_{\text{кр}}=T_\infty$. Кроме того, пренебрежем отводом тепла в пограничный слой воздуха. В результате получим следующее уравнение баланса энергии:

$$\rho_\infty v\cos(\theta+\alpha)\cdot\left(\lambda+\frac{v^2}{2}+c_{\text{л}}\left(T_\infty-T_{\text{п}}\right)\right)=\chi\frac{T_{\text{п}}-T_\infty}{h}.$$

Слой льда в данной точке цилиндра, характеризуемой углом θ, будет расти до тех пор, пока температура поверхности льда не достигнет температуры его плавления (или отвердевания воды) $T_{\text{пл}}$. Полагая $T_{\text{п}}=T_{\text{пл}}$, из последнего уравнения найдем предельную толщину слоя льда:

$$h_*=\frac{\chi\left(T_{\text{пл}}-T_\infty\right)}{\rho_\infty v\cos(\theta+\alpha)\cdot\left(\lambda+\dfrac{v^2}{2}+c_{\text{л}}\left(T_\infty-T_{\text{пл}}\right)\right)}. \qquad (2)$$

В этой формуле нам не известна зависимость от времени угла α наклона внешней поверхности слоя льда по отношению к касательной плоскости в точке θ. Но по крайней мере мы знаем ее при $\theta=0$ (в точке торможения потока). Действительно, в силу симметрии мы можем ожидать $\alpha(0)=0$. Тогда из выражения (1) можно найти то время, за которое слой льда в точке торможения вырастет до значения h_*:

$$t_*=\frac{\rho_{\text{л}}h_*}{\rho_\infty v}=\frac{\rho_{\text{л}}\chi\left(T_{\text{пл}}-T_\infty\right)}{\rho_\infty^2v^2\left(\lambda+\dfrac{v^2}{2}+c_{\text{л}}\left(T_\infty-T_{\text{пл}}\right)\right)}. \qquad (3)$$

Выпишем необходимые табличные данные:

$$\lambda=3{,}35\cdot10^5\ \text{Дж/кг},\ c_{\text{л}}=2{,}1\ \text{кДж/(кг}\cdot\text{К)},$$

$$\chi=2{,}2\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}.$$

Принимая $T_{\text{пл}}-T_\infty=10$ К (температура облака капель на десять градусов ниже точки плавления льда), получим

$$t_*=\frac{900\cdot2{,}2\cdot10}{10^{-6}\cdot10^4\left(3{,}35\cdot10^5+\dfrac{1}{2}10^4-2{,}1\cdot10^4\right)}\ \text{с}\sim10\ \text{с}.$$

(Сравнение чисел в скобках показывает, что основную роль играет теплота кристаллизации.)

Начиная с этого момента, толщина слоя льда в точке торможения перестанет расти, а прибывающие массы переохлажденных капель будут растекаться симметрично по поверхности цилиндра, отвердевая при бóльших значениях угловой координаты θ. Ясно, что до момента времени t_* толщина растущего слоя льда будет иметь максимальные значения в точке торможения (см. рис.1,*а*), а при $t>t_*$ образуются симметричные «рога» (см. рис.1,*б*). Эту зависимость от времени иллюстрирует рисунок 3. Конечно, все наши вычисления будут верны до тех пор, пока слой льда остается достаточно тонким ($h\ll R$).

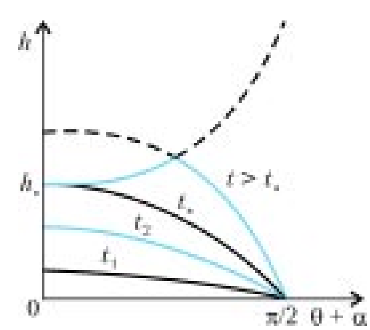


Рис. 3

Добавим, что рассмотренный процесс обледенения опасен не только для летательных аппаратов, а еще, например, для проводов высоковольтных линий. Прежде всего, провод «тяжелеет». Вдобавок, поперечное сечение слоя льда на проводе имеет форму, подобную профилю крыла, и при обдуве ветром провод подпрыгивает вверх, а затем под действием сил упругости и тяжести падает вниз. Все это нередко приводит к обрыву проводов.

А теперь вдумчивый Читатель может перечислить все упрощающие предположения, сделанные выше, и попытаться снять хотя бы одно из них. В результате Он получит новую, более совершенную физическую модель рассмотренного процесса.

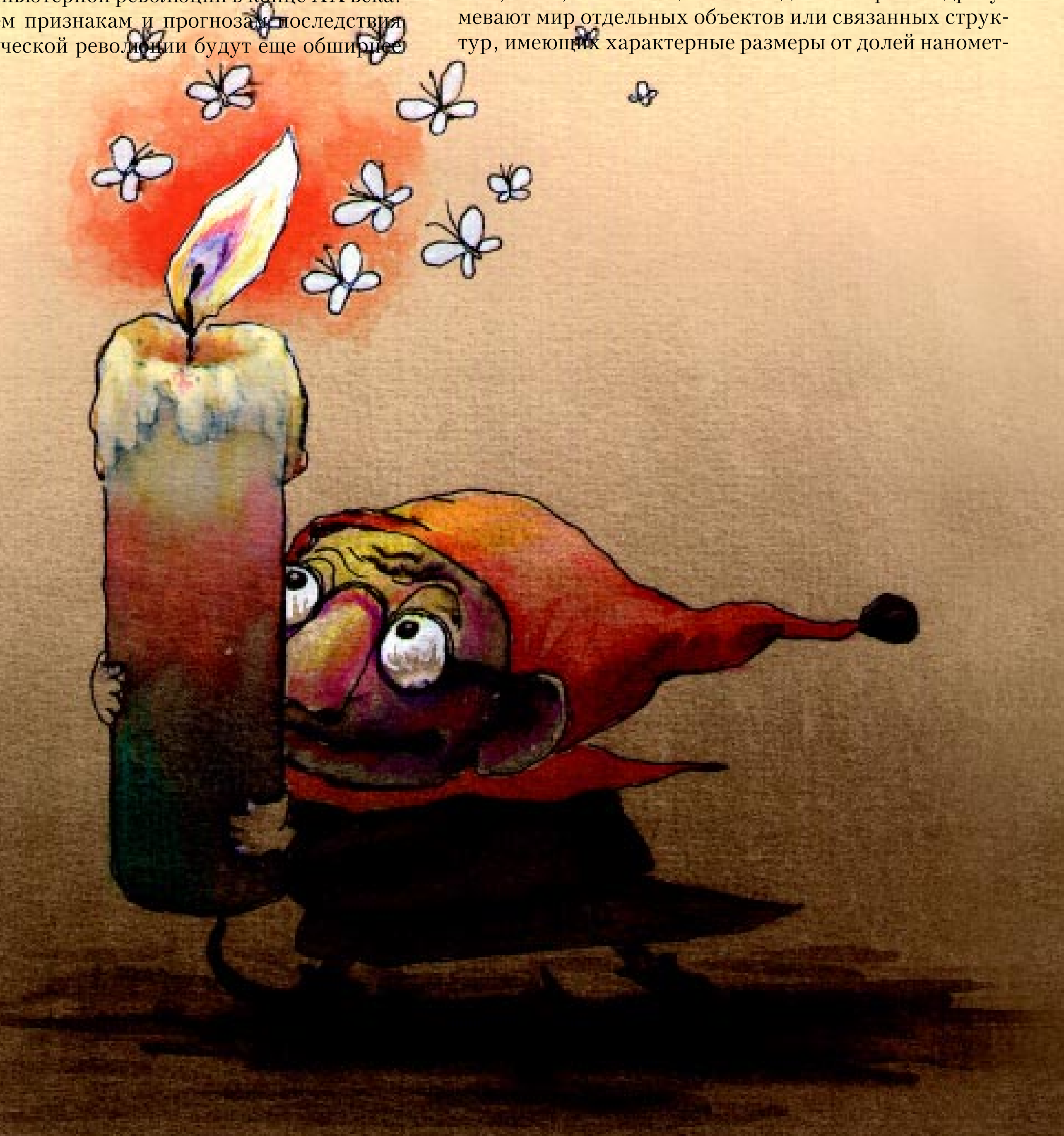
Иллюстрация П.Чернуского

Нанотехнология на службе человека

Ю.ГОЛОВИН

В ближайшее время нанотехнология – чрезвычайно перспективное направление развития науки и техники – обещает проникнуть во все сферы деятельности человека, кардинально изменить производство, экономику да и жизнь в целом, подобно тому как на наших глазах это случилось в результате компьютерной революции в конце XX века. Однако по всем признакам и прогнозам последствия нанотехнологической революции будут еще обширнее и глубже. Важно вовремя сориентироваться и выбрать свой путь в жизни с учетом этого важного обстоятельства.

С приставкой «нано» вы, конечно, уже знакомы. Она происходит от греческого nános – карлик и означает одну миллиардную долю какой-либо единицы: 1 нФ, 1 нс, 1 нА, 1 нм. Чаще всего под наномиром подразумевают мир отдельных объектов или связанных структур, имеющих характерные размеры от долей наномет-



ра до сотен нанометров. Нижняя граница определяется классическим радиусом атома порядка 0,1 нанометра, верхняя – размерами около 0,1 микрометра, при которых утрачивается специфика поведения и свойств наночастиц.

Нанотехнология за последние 5–7 лет из небольшого числа разрозненных специальных методов превратилась в обширную взаимосвязанную отрасль деятельности, в которую развитые страны вкладывают громадные средства, создавая наноцентры, открывая новые специальности в университетах, проводя десятки научных конференций в год. Сейчас под нанотехнологией понимают способность искусственно создавать или находить в природе, контролировать и использовать нанообъекты в различных сферах жизни на основе фундаментальных знаний в области физики, химии и биологии.

На обильно плодоносящем дереве нанотехнологии уже выросло много ветвей(рис.1): это наноматериалы, наноэлектроника и компьютеры следующего поколения, удивительные структуры на основе углерода – фуллерены и нанотрубки, нанолекарства и нанороботы для медицины, обороны, освоения космоса и многое другое. Даже представить себе нанообъекты не так просто, не говоря уже о том, чтобы их создавать и применять на практике. Однако многие окружающие нас предметы быта да и мы сами, как сложно устроенные биологические существа, содержим их в больших количествах. ДНК, белки, жиры, углеводы, играющие важнейшую роль в любом организме, имеют нанометровые размеры.

Около пяти тысяч лет назад человек впервые целенаправленно использовал нанообъекты – дрожжи, которые начал добавлять в тесто, сыры, виноградный сок

Рис.1. Дерево нанотехнологии

с целью получения более деликатесных продуктов питания из пищевого сырья. Совсем недавно (по историческим меркам) человек научился создавать высокопрочные наноструктурированные материалы, тонкие пленки и покрытия, фуллерены и нанотрубки, большие интегральные схемы и многое другое с размерами структурных элементов, лежащими в наношкале. Так, например, в процессоре Pentium-4 они составляют около 100 нм. (Это означает, что на срезе человеческого волоса диаметром порядка 50 мкм можно разместить около 200 тысяч таких элементов.) Реальные размеры пластинки из суперчистого кремния, на которой методами планарной технологии создают микропроцессор или динамическую память для современного компьютера, составляют около 1 см^2, что позволяет разместить на этой подложке, или, как говорят, чипе (от английского chip – осколок, кусочек), несколько миллиардов элементов (это число сопоставимо с числом жителей Земли).

Однако во многих случаях и этого оказывается недостаточно, и на повестке дня стоит задача неуклонного уменьшения размеров отдельных элементов и одновременного увеличения их количества на чипе. Каковы же физические (не технические) пределы миниатюризации? Они определяются размерами отдельных атомов (молекул) и электронными процессами в них. В принципе, можно себе представить все компоненты, необходимые для создания компьютера, выполненные на отдельных молекулах. И такие элементы уже созданы в лабораториях. Строительными блоками в них являются отдельные атомы, а цементом, который их скрепляет, – межатомные силы. Независимо от типа, эти силы меняются с расстоянием очень похоже (рис.2). Это дает возможность реализовать совершенно новый подход к любой технологии (рис.3): не «сверху–вниз», т.е. от большой заготовки к меньшему изделию путем отсечения ненужного материала и превращения его в отходы, а «снизу–вверх», т.е. путем безотходной сборки необходимого изделия из отдельных атомов и молекул. Такой подход обещает в корне изменить наши представления о технологии, внешнем виде и назначении искусственно создаваемых продуктов.

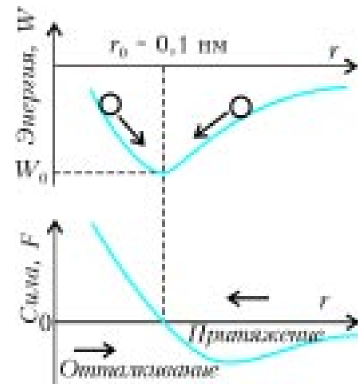


Рис.2. Энергия и сила взаимодействия между атомами

Чем же так привлекательны сами по себе нанообъекты и наноструктуры? Можно назвать множество причин: ничтожное количество необходимой для их производства энергии и сырья, практическая безотходность и экологическая безвредность, возможность создавать очень сложные и вместе с тем очень компактные изделия для электроники, космонавтики, медицины. Особо привлекательно то, что свойствами таких объек-

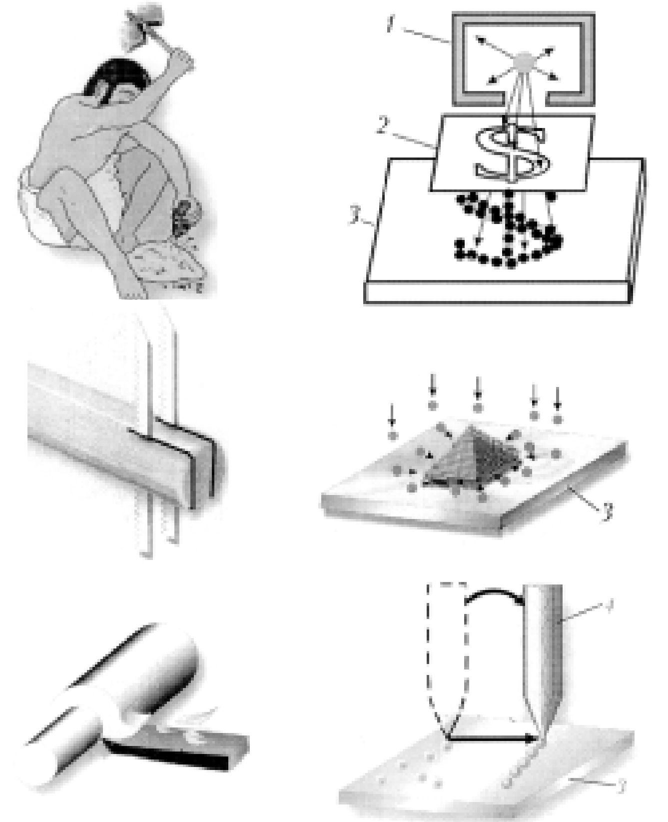


Рис.3. Две технологические парадигмы: «сверху—вниз», т.е. обкалывание, отпиливание, обтачивание, и «снизу—вверх», т.е. молекулярно-лучевая эпитаксия, самосборка наноструктур на поверхности подложки, атомные манипуляции и сборка с помощью иглы туннельного зондового микроскопа (1 – источник ионов или атомов, 2 – маска-трафарет, 3 – подложка, 4 – игла туннельного зондового микроскопа)

тов можно управлять простым изменением размеров, поскольку в области $R_c \leq 100$ нм начинают проявляться так называемые масштабные эффекты. Для различных свойств (механических, электрических, магнитных, химических и др.) этот критический размер R_c может быть разным даже для одного и того же вещества, впрочем как и характер изменений этих свойств при $R \leq R_c$.

Основные причины появления размерных эффектов в наномасштабных объектах связаны, например, с тем, что доля α атомов, находящихся в тонком приповерхностном слое (~ 1 нм), растет с уменьшением размера частички вещества R, поскольку $\alpha \sim S/V \sim R^2/R^3 \sim \sim 1/R$ (здесь S – площадь поверхности частички, V – ее объем).

Кроме того, известно, что атомы, находящиеся на поверхности, обладают свойствами, отличающими их от объемных, так как они связаны с окружающими их атомами по-иному, нежели в объеме. В результате на поверхности может произойти атомная реконструкция и появится другой порядок расположения атомов (что реально и происходит, например, в приповерхностных слоях монокристаллического кремния – основы современной полупроводниковой техники). Для атомов, находящихся на крах моноатомных террас, уступов и впадин на них, возникают совершенно особые условия. Взаимодействие электронов со свободной поверхностью приводит к появлению специфических приповерхностных состояний. Все это вместе взятое дает основание рассматривать приповерхностный слой как некое новое состояние вещества. В связи с этим во многих задачах (особенно в химии) наночастицами считают такие, у которых доля поверхностных атомов превышает 0,1. Тогда для частиц разных форм соответствующий характерный размер R_c будет составлять десятки нанометров.

И еще. Поверхность является «стоком» почти бесконечной емкости для большинства дефектов кристаллической структуры благодаря действию так называемых сил изображения и других причин. (Силы изображения получили свое название по методу расчета, который заключается в помещении симметричного за границей раздела мысленного точно такого же объекта, но противоположного знака.) Силы изображения убывают по мере удаления от поверхности, но если размер частички достаточно мал, то они могут «высосать» из объема на поверхность большинство дефектов и сделать его более совершенным в структурном и химическом отношении.

Другая группа физических причин размерных эффектов состоит в следующем. В любом явлении переноса (электрический ток, теплопроводность, пластическая деформация и т.п.) носителям можно приписать некоторую эффективную длину свободного пробега R_f. При $R \gg R_f$ рассеяние (или захват и гибель) носителей происходит в объеме и слабо зависит от геометрии объекта, а вот при $R < R_f$ ситуация радикально меняется и все характеристики переноса начинают сильно зависеть от размеров образца. В случаях, когда для возникновения нового состояния требуется образование зародыша критического размера R_n (кристаллизация, полиморфные переходы, зарождение магнитного домена или дислокационной петли и т.п.), в частицах с размерами $R < R_n$ этот процесс блокируется, что меняет все термодинамические параметры таких переходов.

Большую перспективу применения в наноэлектронике, наносенсорной технике и т.п. имеют низкоразмерные квантовые структуры, интенсивно изучаемые физиками в последние несколько десятилетий. Обычно это полупроводниковые или сверхпроводящие объекты, имеющие атомарный масштаб в одном, двух или трех направлениях. Их свойства могут резко отличаться от объемных для того же материала – вследствие яркого проявления квантовых закономерностей поведения.

Разумеется, возникает и ряд сложных вопросов. Как превратить уже имеющиеся знания в нанотехнологии и реализовать их в промышленных масштабах? Можно ли полностью предсказать свойства таких объектов? Как их контролировать? Не могут ли они представлять угрозу здоровью, безопасности, обороноспособности страны? Все это далеко не праздные вопросы. На значительную часть вопросов ответы уже есть, на некоторые – еще нет.

Нанотехнология уже разработала десятки, если не сотни, методов конструирования наноструктур, нахождения и отбора их из природных биологических объектов. В коротком рассказе невозможно даже просто упомянуть их все. Остановимся на одном, весьма универсальном и многообещающем – на семействе *зондовых сканирующих нанотехнологий.* Первый из них – сканирующий туннельный микроскоп – был предложен Нобелевскими лауреатами (1986 г.) Г.Биннигом и Г.Рорером в 1981 году, но как средство нанотехнологии они развились в 90-е годы и сейчас включают десятки конкретных способов наблюдения, конструирования и контроля наноструктур атомарного масштаба. Общим для них является наличие атомно острого инструмента – зонда, который способен выполнять несколько функций. Такой зонд с помощью трехкоординатного пьезоманипулятора можно с высокой точностью перемещать в непосредственной близости от исследуемой поверхности. Эта точность в некоторых приборах достигает тысячных долей нанометра. (Среди производственников старой закалки бытует выражение «ловить микроны», т.е. обрабатывать детали с точностью до единиц микрометра. Теперь пришло время «ловить» нанометры и даже их малые доли, т.е. работать в тысячи раз точнее.) Острие, подведенное к поверхности на расстояние порядка размера атома, начинает взаимодействовать с отдельными атомами. И это взаимодействие, конечно, зависит от микрогеометрии поверхности на атомном уровне, от типа самих атомов, их химического состояния.

Поговорим немного об основных разновидностях зондовой нанотехнологии и ее возможностях.

Исторически первым был туннельный микроскоп. Его создание было стимулировано желанием иметь атомное разрешение при исследовании поверхности. Оптическая микроскопия не позволяет этого сделать в принципе. Из-за дифракции световой волны предельное разрешение ограничено примерно половиной длины волны света, на котором работает микроскоп. Для видимого света это соответствует теоретическому пределу разрешения порядка 200 нм (реально он, конечно, еще ниже), что примерно в 1000 раз больше размеров атомов. Современные электронные микроскопы, использующие вместо светового электронный пучок, могут в некоторых весьма редких случаях обеспечивать атомное разрешение. Но они очень дороги и сложны в эксплуатации, и никто не рассматривает их как технологическое средство.

В туннельном сканирующем микроскопе, аккуратно приближая зонд к исследуемой поверхности и подав на него небольшое напряжение (обычно единицы вольт), можно добиться, чтобы через зазор между острием и поверхностью потек слабый (~ 1 нА) туннельный ток. Он фиксируется электроникой и запоминается компьютером. Сканирование с помощью прецизионного пьезоманипулятора по поверхности образца дает возможность собрать информацию о ней от точки к точке. Затем по определенной программе компьютер строит из этих точек изображение поверхности. Слово «изображение» здесь надо понимать как условный визуальный образ, обобщающий большой объем информации о свойствах поверхности (геометрических, электрических, химических, эмиссионных и др.) в удобной и привычной для человека форме.

Другой способ изучения поверхности основан на регистрации силы притяжения (это чаще всего силы Ван-дер-Ваальса, магнитные или электростатические силы) между кончиком острия и небольшой областью поверхности. Зонд при этом расположен на микроскопической балке, изгиб которой регистрируется с помощью лазерного пучка света. Такой вид микроскопии называют атомно-силовым.

Различные структуры, полученные с помощью зондовой микроскопии, представлены на рисунке 4. Зондовые микроскопы могут работать не только в высоком вакууме, какого требует электронная микроскопия, но и на воздухе, и в жидкостях, и в электролитах. С большим успехом зондовые методы применяют для исследования сухого трения, степени износа и т.п. на атомарном уровне. Но и это еще не все их достоинства. Довольно быстро было обнаружено, что их можно использовать в качестве «атомных пинцетов», т.е. активного инструмента манипулирования и перемещения отдельных атомов и молекул. Для этого зонд подводят к нужному атому и затем «перекатывают» его в заранее заданное место или переносят, оторвав от поверхности путем подачи на иглу повышенного напряжения. Результаты вы можете видеть на рисунке 5. Таким способом можно поатомно построить диод, транзистор или даже целую электрическую цепь и реализовать заветную мечту физиков и электронщиков: перейти от многоэлектронных устройств к *одноэлектронике*.

Дело в том, что сейчас любой самый современный прибор, например полевой транзистор в микросхеме, неэкономно «тратит» при переключении тысячи электронов, в то время как для перехода структуры из одного состояния в другое достаточно было бы перебросить с одного атома на другой всего лишь один электрон (рис.6,*а*). Относительно большие токи, кроме неэффективного расходования энергии, приводят к интенсивному тепловыделению, что ограничивает быстродействие и требует эффективного теплоотвода. Так что переход к одноэлектронике с помощью нанотехнологии сулит много выгод: увеличение плотности монтажа, быстродействия и надежности работы.

Другая возможность – не перебрасывать электрон с одного атома на другой, а, оставляя его в одном и том же атоме, изменять его спин, т.е. собственный механический и магнитный момент (рис.6,*б*). Это еще более экономичный путь, который сейчас интенсивно разрабатывается в электронике, магнитной записи информации, физической химии и кинетике. Он получил название *спинтроники.*

Принципиально новый подход к электронике следующего поколения дает использование *слабой сверхпроводимости.* Основной элемент такой электроники – контакт Джозефсона (рис.7). В нем два сверхпроводника разделены тонкой (всего в несколько атомных слоев) пленкой диэлектрика (изолятора). Два таких контакта, включенных параллельно, образуют квантовый интерферометр, в котором ток, магнитное поле и

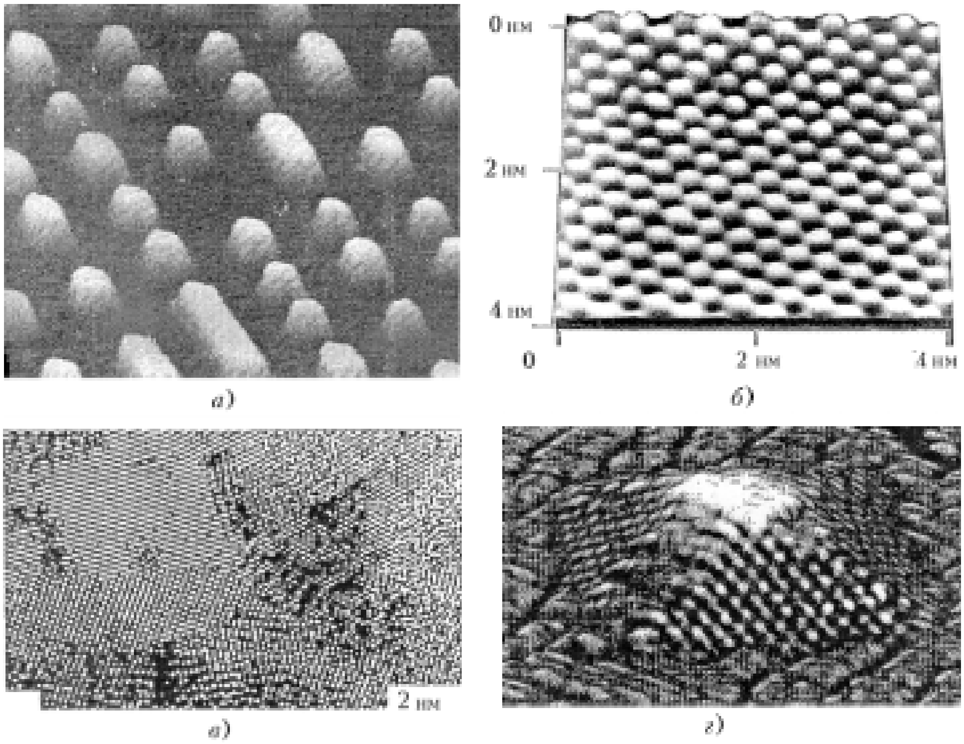


Рис.4. Различные структуры в сканирующем зондовом микроскопе: а) дорожка CD-диска; б) плоскость графита; в) нанокристаллический металл; г) германиевая пирамида из нескольких десятков атомов, выращенная методом самосборки

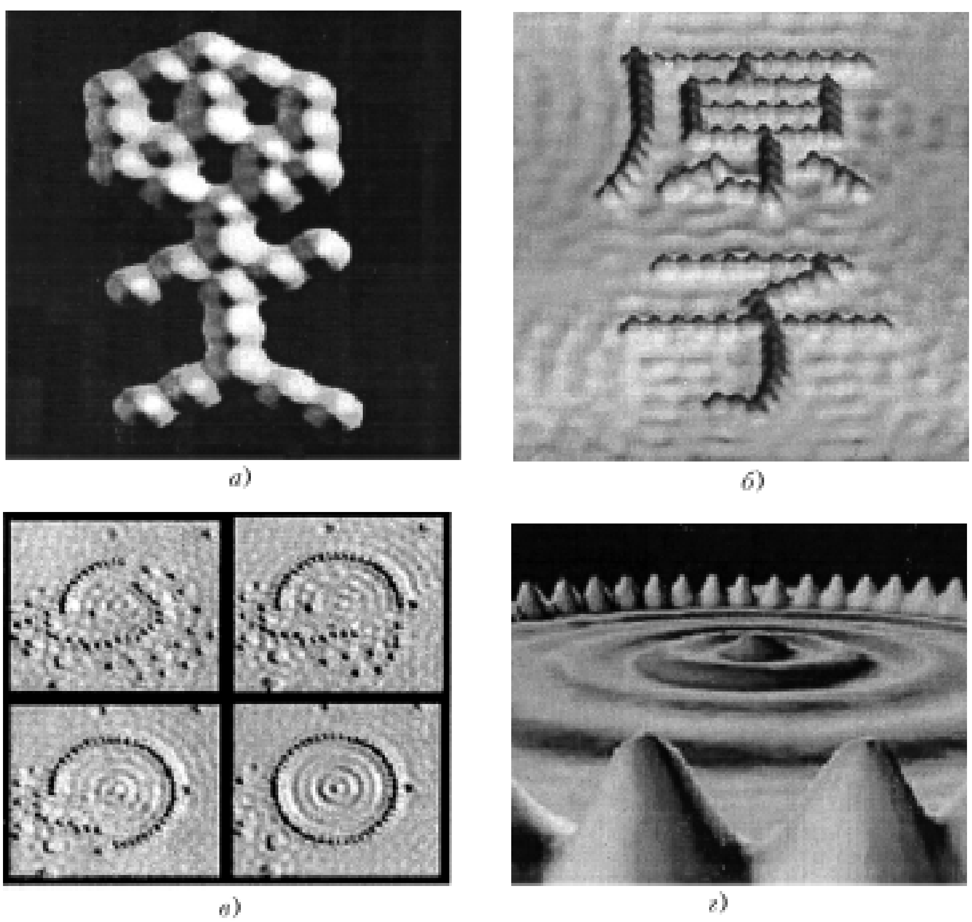


Рис.5. Результаты атомного дизайна: а) пляшущий человечек, изображенный несколькими атомами; б) японские иероглифы; в) и г) сборка квантового «загона» для электрона из нескольких атомов на поверхности

другие величины могут меняться только дискретно. Это очень удобно для цифровой электроники, которая практически вытеснила сейчас аналоговую почти из всех приложений. Время переключения в таких структурах может быть на два-три порядка величины меньше, чем в существующих транзисторах. Это означает, что на их основе могут быть созданы сверхскоростные процессоры с тактовой частотой порядка 1 ТГц $(10^{12}$ Гц$)$ для супер-ЭВМ нового поколения.

Еще больше перспектив у полностью квантовых компьютеров, которые могут быть построены на совершенно новых принципах. В отличие от классических электронных схем с сосредоточенными параметрами, они будут представлять собой устройства с распределенными параметрами, в которых распараллеливание (а значит, и ускорение обработки информации) будет достигать теоретического предела, положенного Природой, от которого современные компьютеры еще очень далеки. Такие компьютеры на основе так называемой быстрой одноквантовой логики смогут обеспечить решение задач, абсолютно недоступных нынешним компьютерам, например – управление экономикой, космическими аппаратами, ядерными реакторами, военными действиями и другими сложнейшими процессами в реальном масштабе времени.

Из всех разновидностей нанотехнологии наиболее быстрыми темпами сейчас развивается *нанобиотехнология*, что подразумевает полезное использование нанообъектов и наноструктур биологического происхождения. Ими могут быть отдельные органические молекулы или даже клетки, из которых состоит все живое. Наиболее развитые разделы нанобиотехнологии – это расшифровка геномов различных организмов, в том числе и человека; трансгенная инженерия, т.е. изменение генетических свойств путем замены отдельных генов в молекуле ДНК; использование органических молекул в чипах

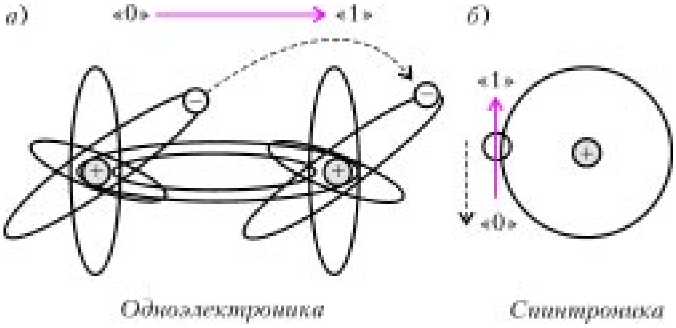


Рис.6. Принципы одноэлектроники (а) и спинтроники (б)

для электроники; внутриклеточные манипуляции и многое другое. Нанобиотехнологии нацелены на разработку принципиально новых лекарств и способов их доставки в необходимую точку, методов диагностики и лечения, на создание высокоэффективных пород сельскохозяйственных животных и сортов растений, гибридных биоэлектронных устройств, сенсоров, анализаторов химического состава воздуха и воды, на нейтрализацию отходов и охрану окружающей среды.

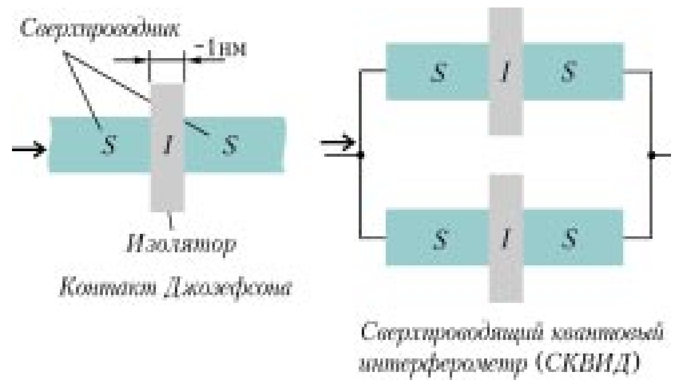


Рис.7. Слабая сверхпроводимость и сверхбыстрая дискретная электроника

Говоря о нанотехнологии, нельзя не упомянуть о теме, чаще всего эксплуатируемой в научно-фантастической и популярной литературе: самообучающиеся и саморазвивающиеся роботы с искусственным интеллектом. Прообразы таких роботов уже созданы, и они могут довольно многое: убирать помещения, управлять производственными процессами, обследовать поверхность других планет (Марса) и т.п. Для этого они имеют разнообразные сенсоры (аналоги глаз, ушей, пальцев человека) для восприятия обстановки и событий в окружающей среде, процессоры для быстрой обработки поступающей информации, гибкие адаптируемые программы для выработки и принятия решений, движители, исполнительные органы (захваты, «руки», скальпели…).

Промышленно выпускаемые роботы пока весьма громоздки, неуклюжи, медлительны, туповаты, если так можно сказать о машине. Перечень задач, которые им можно поручать, пока невелик. А хотелось бы, чтобы они могли заменить человека во всех опасных, вредных или просто рутинных делах. Зачем, например, человеку находиться возле доменной печи, ядерного или химического реактора, рисковать жизнью в открытом космосе, если его можно будет с успехом заменить роботом? А как исследовать изнутри органы человека, мелкие сосуды, не прибегая к хирургической операции, как прицельно доставить микродозу лекарства в нужное место, провести при необходимости хирургическое вмешательство? Все это в принципе можно поручить нанороботам, сочетающим возможности перемещения внутри организма (например, по кровеносным сосудам) со способностями исследователя, диагноста, терапевта, микрохирурга. По частям такие функции уже реализованы в устройствах с габаритами порядка нескольких миллиметров, но они пока не универсальны и не могут проходить в мелкие сосуды, узкие проходы и т.п. Однако нет никаких сомнений, что в скором времени нанотехнология поможет создать таких кибер-докторов, которые станут бесценными ассистентами врачей-людей.

Итак, наука и высокие технологии открыли широкие ворота в наномир. Что сулит нам освоение новой глобальной технологической идеологии? Некоторые последствия легко предсказуемы, другие – менее очевидны и требуют специальных исследований. Вот некоторые из них.

1) Ясно, что экономики развитых стран, освоившие нанотехнологии, сделают крупный шаг вперед. Изменятся приоритеты и структура производства, потребуются рабочие, инженеры, менеджеры новой формации. Обновление продукции будет происходить очень быстро, так что всем придется непрерывно учиться. В ряде стран уже возникла экономика, самым ценным и прибыльным ресурсом которой являются знания, высокие технологии, а не газ, нефть, лес, запасы которых не бесконечны.

2) Объем рынка нанотехнологии через 10–12 лет сравняется с рынком информационных технологий, а потом и обгонит его.

3) Все окружающие нас вещи станут интеллектуальными за счет встраивания в них микрочипов. Они сами станут адаптироваться и оптимизировать режим работы применительно к создавшимся условиям. Иными словами, одежда будет лучше греть или проветриваться, температура и освещение жилища будут подстраиваться под человека, автомобили станут находить оптимальные маршруты перемещения и автоматически избегать столкновений и аварий и т.д.

4) Лекарства, диагностика, лечение будут более дешевыми и эффективными. Это сделает жизнь человека более здоровой и продолжительной.

5) Средства борьбы с терроризмом, военной угрозой станут более действенными, а жизнь – более безопасной.

6) Станет возможным решение многих задач по освоению космоса микророботами с искусственным интеллектом.

7) В связи с ростом производительности труда увеличится доля свободного времени, которое можно будет потратить на духовное развитие, образование, спорт, развлечения.

Университеты Польши

А.ВАСИЛЬЕВ

В 1364 ГОДУ КОРОЛЬ ПОЛЬШИ КАЗИМИР ВЕЛИКИЙ получил от папы римского разрешение основать университет в Кракове, в то время польской столице. Раньше *Краковского университета* в центральной Европе был открыт лишь Пражский университет (1348 г.), а вскоре после него появились университеты в Вене (1365 г.) и Пече (1367 г.). Папа Урбан V, однако, не позволил преподавание теологии в Кракове, ограничив университет факультетами свободных искусств, медицины и права. Следуя порядкам, заведенным в Болонье и Падуе, студенты сами избирали ректора университета, причем его резиденция находилась в королевской крепости Вавель.

Престолонаследник безвременно ушедшего из жизни Казимира Великого Людовик Анжуйский не интересовался развитием Краковского университета, который быстро пришел в упадок. Новый импульс его развитию дала королева Ядвига. Она лично защищала интересы Краковского университета перед папой римским в Авиньоне и завещала университету всю свою собственность. Важнейшую роль в создании Краковского университета сыграл и ее царственный супруг Ладислав II Ягелло, именем которого впоследствии назвали этот университет. Заново он открылся в 1400 году, и с этого же времени в нем стали преподавать теологию. По образу Парижского университета, ректора теперь избирали уже не студенты, а профессора.

Краковский (Ягеллонский) университет быстро завоевал славу одного из ведущих центров образования и науки в средневековой Европе. Уже к середине XV века в Кракове сформировалась школа математики и астрологии. В 1491–1495 годах в Краковском университете обучался Николай Коперник, который всегда считал его своей Alma Mater. В те годы до половины всех обучавшихся в университете студентов приезжали из-за пределов Польши. Наряду с университетами Севильи и Толедо, Краковский университет считался центром средневековой алхимии. Согласно легенде, в Кракове некоторое время проживал знаменитый доктор Фауст. Наконец, первые систематические исследования географии восточных земель также были проведены в Кракове.

В первой половине XVI века Краковский университет отверг идеи реформации, результатом чего стало резкое падение его популярности у студентов Германии и Венгрии. Как оплот католической теологии, университет привлекал лишь студентов из Литвы и Польши. Вместе с тем, число польских студентов также уменьшилось, поскольку местная знать завоевала право занимать важные позиции в государстве независимо от академических достижений. Догматизм и схоластика в преподавании даже светских наук в XVII веке привели Краковский университет к потере международного статуса. Некоторые признаки его возрождения появились лишь тогда, когда в 1748 году была учреждена кафедра естественных наук. К концу XVIII века в Краковском университете были открыты астрономическая обсерватория, ботанический сад, клиника и ряд научных лабораторий.

Вместе со страной Краковский университет в XVIII веке пережил трудные времена. Последовательные разделы Польши между Австрией, Пруссией и Россией поставили под угрозу само существование университета. Правительства этих стран рассматривали его как колыбель революционных и национально-освободительных идей. Со временем, однако, университет вновь обрел былой статус и привлекательность для студентов из многих стран центральной Европы.

В XIX веке Краковский университет прославился работами польских физиков Кароля Ольшевского и Зыгмунта Вроблевского, которые в 1883 году впервые получили жидкий кислород в измеримых количествах. После трагической гибели Вроблевского (при взрыве экспериментальной установки) Ольшевский в 1895 году получил жидкий аргон, добился ожижения водорода и в попытке ожижения гелия достиг температуры, лишь на несколько градусов превышающей абсолютный ноль.

В те же годы в Кракове работали физиолог Наполеон Цибульский, который объяснил действие адреналина; анатомопатолог Тадеуш Брович, который выделил микроб тифа; химик Леон Мархлевский, установивший химическое родство гемоглобина и хлорофилла. Наряду с выдающимися естествоиспытателями в Краковском университете работали также знаменитые историки, философы и правоведы. К началу первой мировой войны Краковский университет насчитывал около ста кафедр, на которых обучалось более 3000 студентов.

После получения независимости Польшей в 1918 году число польских университетов увеличилось от двух (Краков, Львов) до пяти (добавились Варшава, Вильнюс, Познань), причем профессорско-преподавательский состав новых университетов формировался в основном из выпускников Краковского университета. Однако великая депрессия 1930–1934 годов привела к резкому сокращению финансирования университетов. В годы второй мировой войны Краковский университет потерял многих преподавателей и студентов, а его возрождение произошло лишь в последние десятилетия.

Современная организационная структура Краковского университета представлена тринадцатью факультетами, три из которых образуют Медицинский колледж. В 1999 году открылся Биологический исследовательский центр, вслед за которым в 2002 году были учреждены Институт молекулярной биологии и Институт защиты окружающей среды. В настоящее время 3100 профессоров и преподавателей Краковского университета обучают более 27000 студентов, утверждая тем самым Краков в роли ведущего европейского образовательного и научного центра. Одним из знаменитейших его выпускников был Кароль Войтыла – Папа Римский Иоанн Павел II.

В течение длительного времени Краковский университет оставался единственным высшим учебным заведением Польши. В 1505 году городской совет Вроцлава добился подписания королем Венгрии и Богемии Владиславом II декрета об основании *Вроцлавского университета*, но противодействие Кракова положило конец этому начинанию. Лишь через два столетия маленькая Иезуитская академия была основана во Вроцлаве императором Леопольдом I. После вхождения Силезии в состав Пруссии эта академия объединилась с протестантским университетом во Франкфурте-на-Одере, образовав в 1811 году Вроцлавский университет. Университет состоял из четырех классических факультетов, главный из которых – факультет теологии – был представлен протестантским и католическим отделениями.

Наиболее быстрыми темпами Вроцлавский университет развивался во второй половине XIX века. В это время в нем работали знаменитые химики Эдуард Бюхнер и Роберт Вильгельм Бунзен, математик Петер Густав Дирихле, физик Роберт Кирхгоф, астроном Иоганн Готфрид Галле. Знамениты были ассоциации польских студентов во Вроцлаве «Полония» и «Верхняя Силезия», которые сыграли важную роль в политической жизни Польши времен борьбы за независимость.

Долгое время Вроцлав (в немецкой транскрипции – Бреслау) входил в состав Германии. Исторически главный корпус Вроцлавского университета располагался в бывшем замке княжеского рода Пястов. Во время первой и второй мировых войн это здание было практически разрушено. Собственно, польский период в развитии Вроцлавского университета начался лишь в 1945 году, с окончанием второй мировой войны. В те годы Вроцлавский университет и Вроцлавский политехнический институт образовывали единое целое. Они даже делили между собой факультет математики, физики и химии. Наряду с этим, во Вроцлавском университете имелись факультеты гуманитарного, медицинского и сельскохозяйственного профилей, ряд из которых обрел впоследствии статус независимых учебных заведений.

В настоящее время Вроцлавский университет объединяет факультеты истории и педагогики, природоведения, права, математики и информатики, филологии, физики и астрономии, химии, обществоведения и является классическим европейским университетом.

ИНФОРМАЦИЯ

Лауреаты Всероссийского конкурса школьных учителей физики и математики 2005 года

В конце апреля были подведены итоги второго конкурса школьных учителей, организованного Фондом Дмитрия Зимина «Династия» и проведенного при содействии Международной программы образования в области точных наук (ISSEP) и РОО «Клуб учителей «Доживем до понедельника».

Стратегический приоритет деятельности Фонда – поддержка фундаментальной российской науки и предотвращение «утечки мозгов». Целью этого конкурса стала поддержка физико-математического образования в средней школе, расширение профессиональных контактов в среде учителей физики и математики, развитие их сотрудничества с представителями высшей школы и научным сообществом. Победители конкурса награждены индивидуальными денежными грантами в размере 30000 рублей и дипломами Фонда.

В этом году учительский конкурс проводился по трем номинациям: «Молодой учитель», «Учитель, воспитавший Ученика» и «Наставник будущих ученых».

Лауреатами в номинации «Молодой учитель» стали 30 учителей физики и математики, которые недавно приступили к работе в школе, но уже продемонстрировали высокую эффективность в преподавании своего предмета и методическую грамотность в работе со школьниками. На конкурс поступило около 150 заявок. При отборе победителей наибольшее значение придавалось конкурсной работе, в которой учителя рассказывали о своих методах организации дополнительного образования; учитывались также опубликованные ими статьи педагогической тематики, участие учеников в исследовательской деятельности и олимпиадах, количество поступивших в вузы выпускников.

Конкурс «Учитель, воспитавший Ученика» уже стал традиционным для Фонда . Его 30 победителей – это учителя, которых назвали другие лауреаты «Династии», получившие грант в этом году, – Молодые ученые, Аспиранты, Студенты. Они сами были отобраны в рамках жестких конкурсов за успехи в области теоретической физики, а конкурс «Учитель, воспитавший Ученика» дал им возможность назвать своих первых Учителей – тех, кто показал им дорогу в науку.

Самой массовой в учительском конкурсе стала номинация «Наставник будущих ученых» с ее 210 лауреатами. Метод отбора в этой номинации хорошо знаком педагогам по конкурсам «Соросовский учитель» (проводившимся ISSEP с 1995 по 2001 г.). Для участия и победы в конкурсе не нужно заполнять анкеты и подавать заявки, достаточно просто хорошо преподавать свой предмет – ведь лауреатов конкурса называют их бывшие ученики, поступившие в вузы. По всей стране был проведен массовый опрос студентов начальных курсов в вузах естественно-научного профиля. Более 40000 студентов заполнили анкеты, указав своих лучших школьных преподавателей физики и математики. После обобщения полученных данных оказалось, что некоторых учителей признали лучшими десятки студентов – такие педагоги и стали лауреатами этого конкурса. Подобный метод отбора позволил выявить действительно уникальных учителей. Например, оказалось, что на Дальнем Востоке, в городе, где опрос вообще не проводился, работает учитель, чьи выпускники стали студентами четырех ведущих вузов Санкт-Петербурга, двух лучших московских физических вузов и университета в Ростове-на-Дону. Этот конкурс позволил выявить учителей такого класса в 56 регионах России, причем более 40% из них – жители сел и малых городов.

Ниже приводятся списки лауреатов конкурса по каждой номинации.

(Продолжение см. на с. 56)

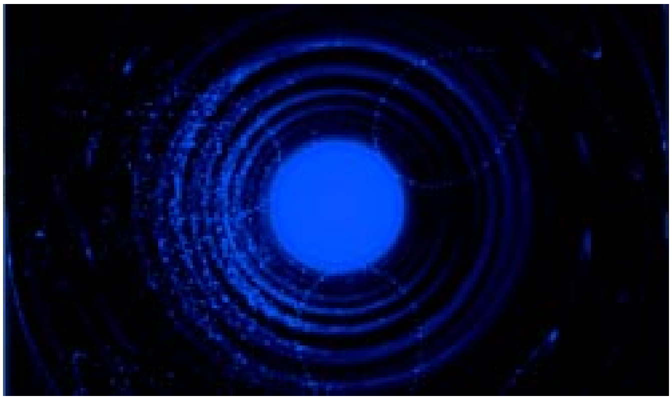
Искусственная шаровая молния

А.АРУТЮНОВ

Шаровая молния – столь же загадочный объект, как, скажем, летающая тарелка или снежный человек. Многие ее видели, но никто пока не смог изучить. А некоторые скептики и вовсе сомневаются в самом существовании явления.

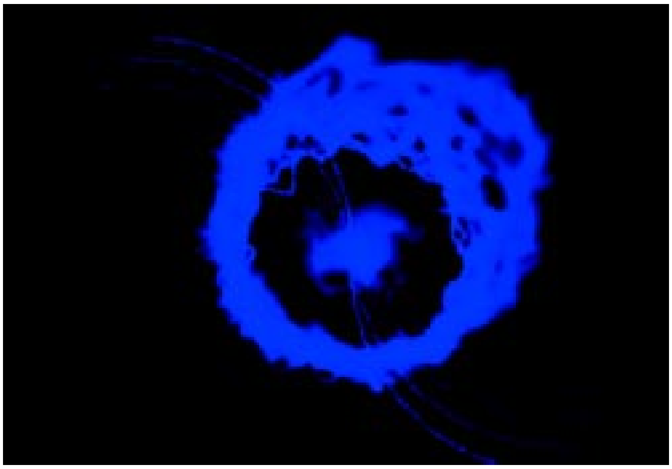
Похоже, что физики из расположенного в Гатчине Петербургского института ядерной физики им. Б.П.Константинова Российской академии наук сумели вплотную подобраться к этому таинственному объекту. Они создали установку, с помощью которой удается получать долгоживущие плазмоиды – искусственные аналоги молнии. «Искусственная шаровая молния – одно из красивейших физических явлений, – говорит один из авторов исследования С.Степанов. – Всплывающие в темном помещении светящиеся шары представляют собой незабываемое зрелище». И эти шары действительно похожи на настоящие шаровые молнии.

Для создания установки ученые воспользовались гипотезой известного российского физика И.Стаханова, который работал в находящемся в подмосковном Троицке Институте



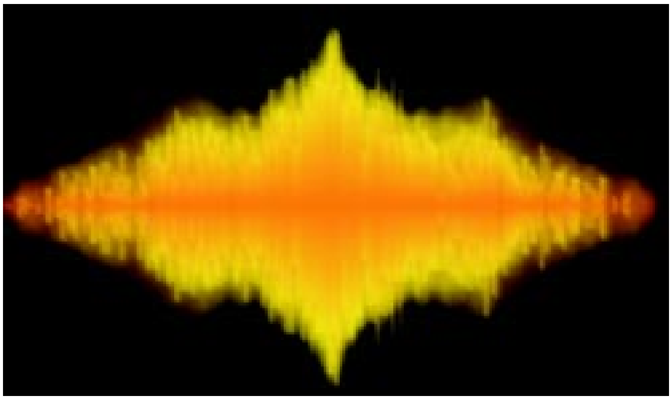
земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Академии наук СССР. В соответствии с гипотезой, главные условия образования шаровой молнии – это сильное электрическое поле и много водяного пара. Некоторые молекулы воды в таких условиях распадаются на ионы водорода и гидроксила. Эти ионы соединяются с сохранившимися в целости молекулами и образуют сгусток холодной плазмы. Молекулы воды в нем мешают сближению ионов, и время их раздельной жизни увеличивается в миллиарды раз, т.е. достигает десятков минут. Получается плазмоид, который способен аккумулировать огромную энергию.

Чтобы воспроизвести такие условия, мы взяли полиэтиленовую банку, наполнили ее водой и на дне разместили электрод в виде кольца. Этот электрод мы соединили с одним из полюсов мощной батареи, которую можно заряжать до 5,5 кВ. Ко второму полюсу батареи мы присоединили цилиндрический угольный электрод. Его спрятали в кварцевую трубку и поместили в центре банки так, что трубка на полсантиметра выступала над поверхностью воды. На торец этого электрода мы накапали 2–3 капли воды и стали быстро включать и выключать электрический ток. При этом из



электрода вылетала плазменная струя, а от нее отделялся светящийся плазмоид диаметром 15 см, который через полсекунды исчезал, распадаясь на части.

Чтобы увеличить время жизни плазмоида, можно капать на электрод не просто воду, а смесь воды, ацетона и какого-нибудь порошка – сажи, опилок, железа и т.д. Этим способом время жизни искусственной молнии увеличивается почти до секунды. Удалось поработать и с цветом плазмоида. Обычно у него сиреневая центральная часть, окруженная желтоватой оболочкой. Если добавить в воду соли кальция, то он становится оранжевым. На цвете сказывалась и замена



электрода: «железные» плазмоиды выглядели белесыми, «алюминиевые» – белыми с красноватым отливом, а «медные» – зеленоватыми.

Лабораторные разряды оказались не такими грандиозными, как природные, но зато они хорошо воспроизводятся и их легко исследовать.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 октября 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1961» или «Ф1968». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи Ф1968 – Ф1972 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1961–М1965, Ф1968–Ф1972

М1961. В параллелограмме $ABCD$ нашлась точка Q такая, что $\angle AQB + \angle CQD = 180°$. Докажите равенства углов: $\angle QBA = \angle QDA$ и $\angle QAD = \angle QCD$ (рис. 1).

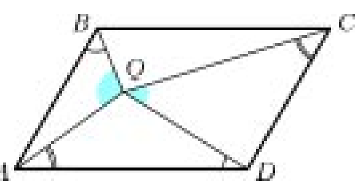


Рис. 1

В.Произволов

М1962. Клетчатый прямоугольник полностью покрыт костями домино (каждая кость покрывает две соседние клетки). Назовем покрытие *оригинальным*, если для любого другого покрытия положение хотя бы одной кости совпадает с положением какой-либо кости оригинального покрытия. Для каких прямоугольников существует оригинальное покрытие?

И.Акулич

М1963. Натуральные числа x, y, z ($x > 2$, $y > 1$) удовлетворяют равенству $x^y + 1 = z^2$. Докажите, что число x имеет не менее 8 различных натуральных делителей.

В.Сендеров

М1964. Вневписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается стороны AB в точке C' и продолжений сторон AC, BC в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда радиусы окружностей ABC и $A'B'C'$ равны.

А.Заславский

М1965. С крыши дома спущена лестница, содержащая n ступенек. С каждой ступеньки можно перешагнуть на соседнюю; кроме того, с самой верхней ступеньки можно переступить на крышу, а с самой нижней – на землю. На каждой ступеньке укреплен указатель-стрелка, направленный вверх либо вниз. В начальный момент на одной из ступенек лестницы стоит человек. В соответствии с указателем он передвигается на соседнюю ступеньку, и сразу после этого указатель меняет направление на противоположное. Со следующей ступеньки человек опять переступает на соседнюю в соответствии с ее указателем, и сразу после этого указатель также меняет положение на противоположное. Далее человек снова и снова переходит со ступеньки на ступеньку по таким же правилам. Какое наибольшее число шагов может сделать человек, пока не сойдет с лестницы на землю или на крышу?

И.Акулич

Ф1968. Капля ртути на чистой горизонтальной поверхности стекла и капля воды на ворсистой поверхности травинки подобны друг другу по форме. Оцените отношение масс этих капель. Плотности ртути и воды равны $\rho_р = 13{,}6$ г/см^3 и $\rho_в = 1$ г/см^3, а их коэффициенты поверхностного натяжения составляют $\sigma_р = 0{,}46$ Н/м и $\sigma_в = 0{,}07$ Н/м соответственно.

С.Варламов

Ф1969. Горизонтальный закрытый теплоизолированный цилиндр разделен на две части тонким теплопроводящим поршнем, который прикреплен пружиной к одной из торцевых стенок цилиндра. Слева и справа от поршня находятся по ν молей идеального одноатомного газа. Начальная температура системы T, длина цилиндра $2l$, собственная длина пружины $l/2$, удлинение пружины в состоянии равновесия x. В поршне проделали отверстие. На сколько изменится температура системы после установления нового состояния равновесия? Теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины пренебречь. Считать, что трения нет.

О.Шведов

Ф1970. Две очень длинные цилиндрические трубы имеют одну и ту же длину, а их радиусы равны R и $R - r$, причем $r \ll R$. Труба меньшего радиуса вставлена в бо́льшую так, что их оси и торцы совпадают. Трубы заряжены равномерно по площади электрическими зарядами: внутренняя с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, а внешняя – с поверхностной плотностью $-\sigma$. На оси этой системы вблизи от одного из торцов измеряют напряженность электростатического поля E. Найдите, как зависит E от расстояния x до этого торца.

С.Варламов

Ф1971. Имеется бесконечная сетка, составленная из одинаковых проволочек (рис.2). Известно, что сопротивление, измеренное между точками *1* и *2* этой сетки, равно R, а между точками *1* и *3* – r (на самом деле, эти сопротивления связаны определенным образом, но не будем усложнять себе задачу). Найдите сопротивление между точками *1* и *4*, выразив его через R и r.

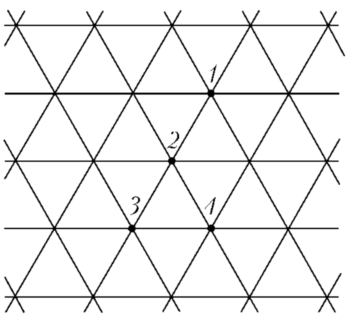


Рис. 2

Е.Антышев

Ф1972. На высоте h от горизонтальной плоскости находится тонкое непроводящее кольцо массой m и радиусом R, по которому равномерно распределен заряд q. В момент времени $t = 0$ кольцо начинает падать без начальной скорости, сохраняя в полете горизонтальное положение. Одновременно с началом падения кольца включается магнитное поле, ось симметрии которого совпадает с осью кольца. Вблизи кольца магнитное поле однородно, направлено вертикально, а его индукция нарастает по закону $B = kt^2$, где k – постоянная величина. Упав на плоскость, кольцо быстро останавливается и прилипает к ней. Найдите количество теплоты, которое при этом выделится в данной системе. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения равно g.

К.Башевой

Решения задач М1936–М1945, Ф1953–Ф1957

М1936. *Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, чтобы из нее можно было вырезать любой треугольник площади 1?*

Рассмотрим равносторонний треугольник площадью 1, который расположен так, чтобы одна сторона лежала на краю ленты, а противоположная вершина – на другом краю. Докажем, что наименьшая ширина ленты равна высоте этого треугольника. Все другие треугольники будут иметь хотя бы одну сторону, большую чем у равностороннего. А следовательно, высота треугольника, опущенная на бо́льшую сторону, будет меньше высоты равностороннего треугольника, поэтому этот треугольник не будет выходить за пределы ленты, если его расположить так, чтобы бо́льшая сторона лежала на границе ленты. Легко видеть, что равносторонний треугольник нельзя расположить никаким другим способом, чтобы ширина ленты была наименьшей.

Отсюда находим высоту равностороннего треугольника, площадь которого 1:

$$h = \sqrt[4]{3}.$$

Итак, ширина ленты должна быть $h = \sqrt[4]{3}$.

Д.Семенов

М1937. *Окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга внешним образом (рис.1). Пусть A, B, C – точки касания S_1 и S_2, S_1 и S_3, S_2 и S_3 соответственно. Прямая AB повторно пересекает S_2 и S_3 в точках D и E соответственно. Прямая DC повторно пересекает S_3 в точке F. Докажите, что ΔDEF прямоугольный.*

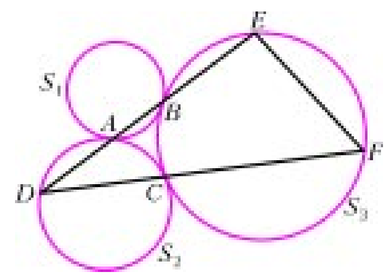


Рис. 1

Пусть O_1, O_2, O_3 – центры окружностей S_1, S_2, S_3 соответственно (рис.2). Легко видеть, что $\angle O_1BA = \angle O_1AB = \angle DAO_2 = \angle ADO_2$. Поэтому $O_1O_3 \parallel DO_2$. Аналогично, $\angle O_3FC = \angle O_3CF = \angle DCO_2 = \angle CDO_2$ (см. рис.2).

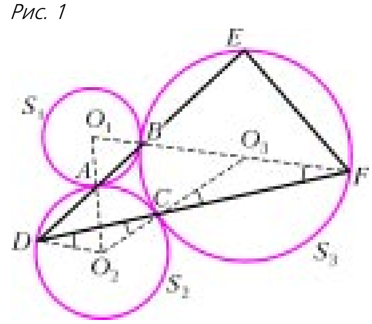


Рис. 2

Поэтому $O_3F \parallel DO_2$. Следовательно, O_1O_3F – прямая, BF – диаметр окружности S_3, и $\angle E = 90°$.

И.Рудаков

М1938. *Для любых чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство*

$$\max\{x_1, \ldots, x_n, -x_1 - \ldots - x_n\} \geq \frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{2n-1}.$$

Когда все числа $x_1, \ldots, x_n$ неотрицательны, неравенство очевидно, можно даже заменить $2n - 1$ на n. Если же среди них есть отрицательное число, то можно считать без ограничения общности, что числа $x_1, \ldots, x_k$ неположительны, а $x_{k+1}, \ldots, x_n$ – неотрицательны ($1 \leq k \leq n$). Обозначим сумму модулей чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ буквой S. Очевидно,

$$S = -x_1 - \ldots - x_k + x_{k+1} + \ldots + x_n.$$

Предположим, что доказываемое неравенство неверно. Тогда число $S/(2n-1)$ больше как каждого из чисел

$x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, так и числа

$$-x_1 - \ldots - x_k - x_{k+1} - \ldots - x_n = S - 2\left(x_{k+1} + \ldots + x_n\right).$$

Следовательно,

$$\frac{S}{2n-1} > S - 2(n-k)\frac{S}{2n-1}.$$

Умножив обе части неравенство на $2n - 1$ и приведя подобные члены, получаем противоречие:

$$S > (2k-1)S.$$

Задача решена. В заключение отметим, что при $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 1$ и $x_n = -n$ доказанное неравенство обращается в равенство, поэтому знаменатель $2n - 1$ нельзя уменьшить.

Н.Осипов, А.Спивак

М1939. *Вершины 50 прямоугольников разделили окружность на 200 равных дуг. Докажите, что среди прямоугольников найдутся два равных.*

Сначала уделим внимание вспомогательному утверждению.

Пусть на числовой прямой расположены 50 отрезков, концами которых являются все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Тогда выполняется одно из двух:

среди отрезков есть два равных, (1)

среди отрезков есть два, сумма длин которых равна 100. (2)

В справедливости этого утверждения можно убедиться из соображений четности. Априори ясно, что сумма длин 50 отрезков с концами в натуральных числах от 1 до 100 является четным числом. Но, с другой стороны, сумма длин 50 отрезков, которые не удовлетворяют ни (1), ни (2), является нечетной (ибо у нее та же четность, что у суммы 1 + 2 + … + 50).

Осталось применить это утверждение к задаче. Длину окружности будем считать равной 200. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_{200}$ – это вершины прямоугольников, последовательно делящие окружность на 200 единичных дуг. Но нас будет интересовать дуга A_1A_{100}. На этой дуге каждый из 50 прямоугольников имеет ровно две вершины, которые являются концами дуги (части дуги). Если две из этих 50 дуг равны, то соответствующие им прямоугольники равны. Но прямоугольники будут равны и тогда, когда длины двух дуг составляют в сумме 100.

В.Произволов

М1940. *Пусть a – натуральное число. Докажите, что уравнение $x(x+a) = y^2$*

а) при a = 1, 2, 4 не имеет решений в натуральных числах;

б) при любом другом натуральном a имеет их.

б) Заметим, что если уравнение $x(x+a) = y^2$ при некотором a разрешимо в натуральных числах, то этим же свойством при любом натуральном b обладает и уравнение $x(x+ab) = y^2$. Поэтому достаточно рассмотреть случаи $a = 2n+1$, где $n \geq 1$, и $a = 8$. В первом из них достаточно положить $(x, y) = \left(n^2, n(n+1)\right)$, во втором – $(x, y) = (1, 3)$.

а) Пусть $1 \leq a \leq 4$. Тогда

$$x^2 < x(x+a) \leq x(x+4) < (x+2)^2.$$

Отсюда

$x(x+a) = y^2 = (x+1)^2$, $(a-2)x = 1$, $a - 2 = 1$, $a = 3$.

В.Сендеров

М1941. *На плоскости жили 44 веселых чижа, точечных и непрозрачных. После посещения плоскости Мурзиком[1] чижи разлетелись и расселись на плоскости так, что каждый из них видит ровно 10 других. Докажите, что посещение Мурзиком плоскости уменьшило количество проживающих на ней веселых чижей.*

Пусть Γ_0 – выпуклая оболочка[2] множества M чижей, оставшихся на плоскости после посещения Мурзика, и Γ – граница Γ_0. Если бы все n чижей из множества M сидели исключительно на границе Γ, то, как нетрудно доказать, их было бы всего 11, и задача была бы полностью решена. Будем поэтому считать, что некоторый чиж A сидит строго внутри Γ.

Соединив чижа A со всеми остальными чижами, получим лучи $I_1, I_2, \ldots, I_{10}$, которые будем считать *открытыми,* т.е. не содержащими начала A. Поскольку угол между соседними лучами меньше $180°$, каждый чиж на луче I_m видит соседние с I_m лучи полностью ($1 \leq m \leq 10$). Следовательно, число чижей, расположенных на объединении двух произвольных *идущих через один* лучей I_{m-1} и I_{m+1}, не превосходит 9: $s_{m-1} + s_{m+1} \leq 9$. (Мы обозначаем через s_i число чижей на луче I_i – без чижа A! – и считаем, что $I_0 = I_{10}$ и $I_{11} = I_1$.) Аналогичное рассуждение показывает, что, вообще, если между какими-то двумя рассмотренными лучами угол не равен $180°$ (а тем самым меньше $180°$), то общее число чижей на двух этих лучах (без чижа A) не превосходит 9.

Возьмем каких-либо двух *соседних* чижей B и C на границе Γ. Точки B и C обязаны располагаться на одной и той же стороне многоугольника, поскольку в противном случае между ними располагалась бы вершина этого многоугольника и тогда чижи B и C не были бы соседними. Рассмотрим «внутреннего» чижа A, расстояние от которого до прямой BC *минимально*, и пусть $I_1 = AB$ и $I_2 = AC$ – лучи с началом в A. Легко видеть, что эти лучи соседние и что на каждом из них сидит ровно *один* чиж: в противном случае нашелся бы чиж, расположенный ближе к прямой BC, чем расположен к ней чиж A. Имеем:

$$s_1 + s_2 + (s_3 + s_5) + (s_7 + s_9) + {} + (s_4 + s_6) + (s_8 + s_{10}) \leq 2 + 4 \times 9 = 38,$$

откуда общее число оставшихся после посещения ко-

[1] *Мурзик – кот.*

[2] *Т.е. содержащий M выпуклый многоугольник (или отрезок), все вершины (соответственно, концы отрезка) которого принадлежат M. Существование Γ_0 легко доказывается индукцией по числу точек M. Легко видеть, что любое выпуклое множество, содержащее M, содержит Γ_0.*

том чижей $n \le 38+1=39$. Таким образом, Мурзик скушал уже не менее 5 птичек.

Докажем, что в действительности $n < 39$. Для этого достаточно доказать, что сумма чисел хотя бы в одной из четырех скобок строго меньше 9.

Предположим противное: пусть сумма чисел *в каждой* скобке равна 9. Из равенства $s_3+s_5=9$ получаем, что $s_4=1$: любой чиж на луче I_4 видит чижа A плюс 9 чижей на объединении лучей I_3 и I_5, так что на луче I_4 больше чижей быть не может. Аналогично получаем, что $s_8=1$, $s_5=1$ и $s_9=1$. Далее, обозначим через α угол между лучами I_3 и I_6 и через β угол между лучами I_7 и I_{10}. Так как $\alpha+\beta<360°$, имеем $\min\{\alpha,\beta\}<180°$; без ограничения общности будем считать, что $\alpha<180°$. В этом случае, как мы выяснили ранее (см. конец второго абзаца), $s_3+s_6\le 9$, что противоречит равенствам $s_3=s_6=8$. Стало быть, наше исходное предположение неверно, и неравенство $n<39$ доказано.

Итак, зверь из задачи скушал по крайней мере 6 птичек. Однако хвостатый еще не наелся, и он мяучет читателю о дальнейшем усилении полученной в нашем решении оценки количества выживших веселых чижей.

Г.Гальперин, В.Сендеров

М1942. *Внутри острого угла с вершиной O даны точки A и B. Бильярдный шар может попасть из A в B, отразившись либо от одной стороны угла в точке M, либо от другой в точке N. Докажите, что если OA = OB, то точки O, A, B, M, N лежат на одной окружности.*

Пусть B_1, B_2 – точки, симметричные B относительно сторон угла. Так как точки B_1, B_2, A, B лежат на окружности с центром O, то

$$\angle MAN = \angle B_1AB_2 = (2\pi - \angle B_1OB_2)/2 = \pi - \angle MON .$$

Следовательно, точка A лежит на окружности MON. Аналогично, на этой окружности лежит и точка B.

А.Заславский

М1944.[1] *Квадратный стол площади 5 можно покрыть в четыре слоя пятью квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 4. Как это сделать?*

Салфетки разрешается перегибать.

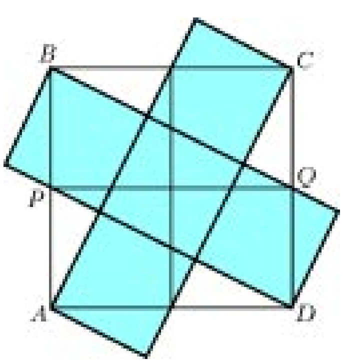


Рис. 1

Сначала расположим 5 наших салфеток на квадрате $ABCD$, который по площади вчетверо больше нашего стола, так, как показано на рисунке 1. При этом будем считать, что салфетки склеены между собой в единую крестообразную скатерть, верх у которой синий, а изнанка красная. Уголки скатерти, выходящие за пределы $ABCD$, перегнем; они лягут в пределах $ABCD$ (рис.2). Далее перегнем скатерть по средней линии PQ квадрата $ABCD$ так, что она в два слоя покроет прямоугольник $APQD$. Завершающее действие: перегибаем скатерть по вертикальной средней линии прямоугольника $APQD$.

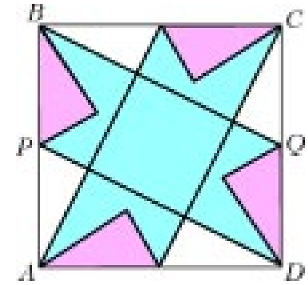


Рис. 2

При этом скатерть в четыре слоя покроет квадрат, по площади равный нашему столу.

В.Произволов

М1945. *Всякий ли остроугольный треугольник можно расположить в пространстве так, что его вершины окажутся*

а) на ребрах какого-нибудь куба, выходящих из одной его вершины;

б) на диагоналях граней какого-нибудь куба, выходящих из одной его вершины?

а) Да.

Условием того, что вершины некоторого треугольника со сторонами a, b, c лежат на лучах OX, OY, OZ, является разрешимость системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ y^2+z^2=b^2, \\ z^2+x^2=c^2, \end{cases}$$

где $x>0$, $y>0$, $z>0$.

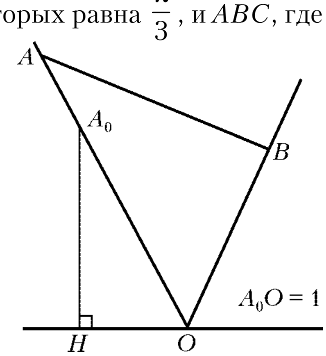
Эта система разрешима в точности если $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$, т.е. если треугольник остроуголен.

Заметим, что при любой величине α плоских углов при вершине правильного трехгранного угла величина одного из углов треугольника сечения может быть сделана сколь угодно близкой к $\max\{\alpha, \pi-\alpha\}$. Отсюда следует, что треугольник с вершинами на ребрах любого правильного трехгранного угла, угол между которыми по величине отличен от $\frac{\pi}{2}$, может оказаться как прямоугольным, так и тупоугольным.

б) Нет.

Рассмотрим куб $OEFDO'E'F'D'$. Поскольку треугольник $OE'D'$ правильный, $\angle E'OD' = \frac{\pi}{3}$.

Пусть из точки O выходят три луча, величина угла между любыми двумя из которых равна $\frac{\pi}{3}$, и ABC, где $AB=1$, – треугольник с вершинами на этих лучах. Имеем $\max\{OA, OB\}\ge 1$; пусть для определенности $OA\ge 1$. Тогда $AC \ge$ $\ge A_0H = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. рисунок). Окончательно получаем: треугольник, длины сторон которого 1, a, b, где



[1] *Решению задачи М1943 посвящена заметка И.Акулича, публикуемая ниже.*

$a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b < \frac{\sqrt{3}}{2}$, вершинами на лучах п.б) расположить нельзя.

Итак, в сечении куба можно получить любой остроугольный треугольник, а в сечении правильного тетраэдра – нет. Модификация рассуждения, проведенного нами в случае $\alpha = \frac{\pi}{3}$, показывает, что ответ отрицателен и в случае любых острых углов величины α между лучами.

С другой стороны, нетрудно показать, что в сечении правильного трехгранного угла с плоскими углами α, $\frac{2\pi}{3} \ge \alpha > \frac{\pi}{3}$, можно получить любой треугольник, величины всех углов которого меньше α. Следовательно, в случае тупых углов величины α между лучами ответ на вопрос задачи положителен.

Заметим, что в этом случае сечениями являются в точности треугольники, все углы каждого из которых меньше α. Если фиксировать ребра трехгранного угла, на которых лежат, соответственно, вершины A, B, C данного треугольника ABC с этим свойством, то сечение определится однозначно.

С.Дворянинов, В.Сендеров

Ф1953. *Пуля вылетает из ствола с уровня земли со скоростью 50 м/с и «втыкается» в землю, закончив свой полет. На каком максимальном расстоянии от точки выстрела она могла оказаться через 3 с после выстрела? Земля в тех местах плоская, сопротивлением воздуха можно пренебречь.*

Это совсем простая задача. Ясно, что стрелять нужно под углом поменьше, но так, чтобы использовать весь отведенный интервал времени (пуля «втыкается» в землю при падении). Тогда

$$v_0 \sin\alpha_0 = \frac{g\tau}{2},$$

$$L = v_0 \cos\alpha_0 \cdot \tau = v_0\tau\sqrt{1-\sin^2\alpha_0} = v_0\tau\sqrt{1-\left(\frac{g\tau}{2v_0}\right)^2} =$$

$$= 50\cdot 3\sqrt{1-\left(\frac{30}{100}\right)^2}\ \text{м} \approx 143\ \text{м}.$$

Впрочем, стоит проверить – не окажется ли выгоднее взять угол немного меньше α_0 и постараться выиграть за счет увеличения горизонтальной составляющей скорости, несмотря на уменьшение времени полета. Анализ нетрудно сделать и в общем виде (это не так сложно), но можно провести «численный эксперимент» при помощи калькулятора (полезная вещь, между прочим...).

А.Простов

Ф1954. *Верхний блок с закрепленной осью склеен из двух дисков, один из которых имеет вдвое больший диаметр, чем другой (рис.1). Легкая нерастяжимая нить намотана на диски и охватывает также нижний блок, причем нижний блок имеет такой диаметр, что свободные куски нити вертикальны. Найдите ускорения грузов. Блоки считать легкими.*

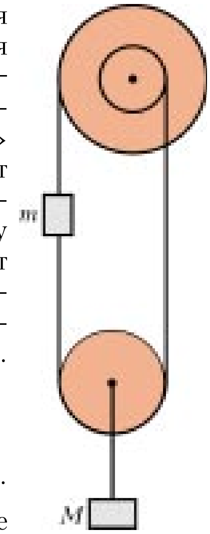


Рис. 1

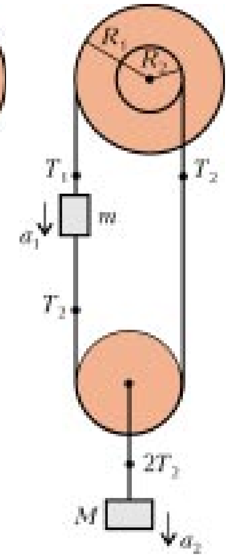


Рис. 2

Введем обозначения для сил натяжения нитей и ускорений – они показаны на рисунке 2. «Сложный» блок наверху имеет по условию очень малую массу, поэтому действующий на этот блок суммарный вращающий момент должен быть нулевым. Отсюда получаем

$$T_1R_1 = T_2R_2, \text{ и}$$

$$T_2 = 2T_1.$$

Найдем отношение ускорений a_1 и a_2. Пусть верхний блок повернулся против часовой стрелки (например) на некоторый угол α. При этом длина свободного конца нити слева увеличится на αR_1, а длина правого конца уменьшится на αR_2. Тогда нижний блок опустится на

$$\frac{\alpha R_1 - \alpha R_2}{2} = \frac{1}{4}\alpha R_1,$$

откуда получаем

$$a_1 = 4a_2.$$

Для груза массой m запишем

$$mg + T_2 - T_1 = ma_1.$$

Для груза массой M –

$$Mg - 2T_2 = Ma_2.$$

Решая эту простую систему, находим

$$a_1 = g\frac{M+4m}{0{,}25M+4m},\ \ a_2 = g\frac{M+4m}{M+16m}.$$

А.Блоков

Ф1955. *В вакууме находятся два массивных одинаковых тела, их температуры вначале равны T и 3T. Если привести тела в соприкосновение, то при выравнивании температур от горячего тела к холодному перетечет количество теплоты Q. Какую максимальную работу можно было бы получить, используя эти тела и тепловую машину? Других тел в нашем распоряжении нет.*

Будем считать, что наша тепловая машина идеальная и совершает очень большое число циклов для получения результата. В этом случае можно использовать известное выражение для КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}}.$$

Однако по мере совершения работы в нашей системе температуры тел (нагревателя и холодильника) меняются, меняется и КПД – от начального значения $\eta_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ до нуля. Взять «средний» КПД – это просто, но неправильно. Поступим иначе.

Пусть за очередной цикл нагреватель отдает порцию количества теплоты Q, тогда холодильник получит количество теплоты $Q(1-\eta) = Q\frac{T_х}{T_н}$. Температура нагревателя изменится на $\Delta T_н$, а температура холодильника – на $\Delta T_х = -\Delta T_н \frac{T_х}{T_н}$ (теплоемкости тел по условию задачи одинаковы). Тогда $\frac{\Delta T_н}{T_н} = -\frac{\Delta T_х}{T_х}$, откуда следует, что

$$T_н T_х = \mathrm{const}$$

(можно получить это «математически», а можно и просто сообразить, что если один из сомножителей увеличить во сколько-то раз, или на некоторое число процентов, а второй уменьшить во столько же раз, то произведение останется тем же). Это означает, что температуру равновесия $T_р$ (окончательную) можно найти из соотношения

$$T_р^2 = 3T \cdot T = 3T^2, \text{ или } T_р = T\sqrt{3}.$$

Обозначим теплоемкость одного тела C и запишем выражение для работы:

$$A = Q_н - Q_х = C\left(3T - T_р\right) - C\left(T_р - T\right) = CT\left(4 - 2\sqrt{3}\right).$$

Но при соприкосновении тел горячее остывает от $3T$ до $2T$, т.е. $Q = CT$. Окончательно,

$$A = Q\left(4 - 2\sqrt{3}\right) \approx 0{,}54Q.$$

Если, все же, взять $\eta = \eta_{ср} = \frac{1}{3}$, то результирующая температура $T_р^*$ определится из условия

$$-\Delta T_н = \frac{3}{2}\Delta T_х, \; 3T - T_р^* = 1{,}5\left(T_р^* - T\right), \; T_р^* = 1{,}8T,$$

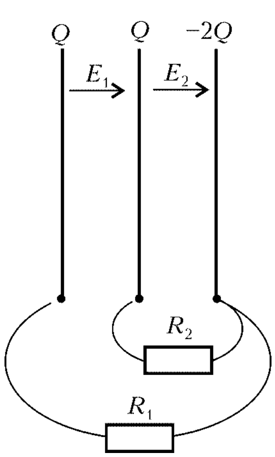
и тогда

$$A = C(3T - 1{,}8T) - C(1{,}8T - T) = Q(1{,}2 - 0{,}8) = 0{,}4Q.$$

Видим, что ответ довольно сильно отличается от полученного аккуратным расчетом.

Р.Повторов

Ф1956. *Три большие параллельные пластины площадью $S = 2\ м^2$ каждая расположены в вакууме на одинаковых малых расстояниях $d = 1$ мм друг от друга. Заряд средней пластины $Q = 1$ мкКл, заряды двух других Q и $-2Q$. Между крайними пластинами включают резистор сопротивлением $R_1 = 30$ кОм, одновременно с ним еще один резистор сопротивлением $R_2 = 20$ кОм включают между средней пластиной и пластиной с зарядом $-2Q$. Какое количество теплоты выделится при этом в первом резисторе?*



Найдем напряженности полей E_1 и E_2 до подключения резисторов (см. рисунок):

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}, \; E_2 = \frac{2Q}{\varepsilon_0 S} = 2E_1.$$

Разность потенциалов между средней и правой пластинами равна

$$\Delta\varphi_2 = E_2 d = \frac{2Qd}{\varepsilon_0 S},$$

а между крайними пластинами –

$$\Delta\varphi_1 = E_1 d + \Delta\varphi_2 = \frac{3Qd}{\varepsilon_0 S} = 1{,}5\Delta\varphi_2.$$

Теперь видно, что сопротивления резисторов R_1 и R_2 подобраны специально (точнее, их отношение: $R_1/R_2 = \Delta\varphi_1/\Delta\varphi_2$), токи через них получаются одинаковыми, и все соотношения между зарядами (и полями) после подключения резисторов остаются прежними.

Через резистор сопротивлением R_1 за большое время пройдет весь заряд Q первой пластины. Разность потенциалов между выводами этого резистора с течением времени убывает, зависимость $\Delta\varphi$ от времени нелинейная, но от величины протекшего по резистору заряда q – линейная:

$$\Delta\varphi = \frac{3(Q - q)d}{\varepsilon_0 S}.$$

В этом случае количество теплоты, выделившееся на резисторе, можно найти так:

$$W_1 = \Delta\varphi_{ср} Q = \frac{\Delta\varphi_{нач}}{2} Q = \frac{\Delta\varphi_1}{2} Q = \frac{3Q^2 d}{2\varepsilon_0 S} = 1{,}5\frac{Q^2}{C},$$

где C – емкость конденсатора, образованного соседними пластинами. Поскольку $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \approx 1{,}77 \cdot 10^{-8}$ Ф, то $W_1 \approx 85$ мкДж.

А.Зильберман

Ф1957. *Цепь из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C используют в качестве фильтра низких частот (рис.1). При увеличении частоты генератора начиная с некоторой частоты напряжение на нагрузке уменьшается и при дальнейшем увеличении частоты становится совсем малым. При каком сопротивлении нагрузки R напряжение с увеличением частоты генератора будет меняться монотонно? (Если взять R достаточно большим, то будет явно выражен резонанс – при приближении к собственной частоте LC-контура напряжение нагрузки будет резко возрастать, и только потом – на еще больших частотах – будет уменьшаться.)*

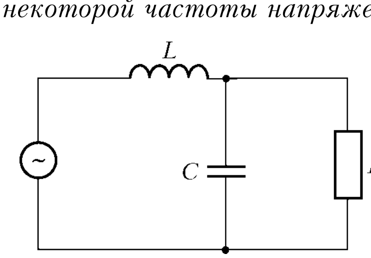


Рис. 1

Пусть напряжение источника изменяется по закону $U_0 \cos\omega t$, а «выходное» напряжение на резисторе сопротивлением R – по закону $U\cos(\omega t + \varphi)$. Нарисуем векторную диаграмму токов и напряжений (рис.2), начиная с U. Ток через резистор $I_R = \frac{U}{R}$ и ток через конденсатор $I_C = U\omega C$ сдвинуты по фазе на 90°,

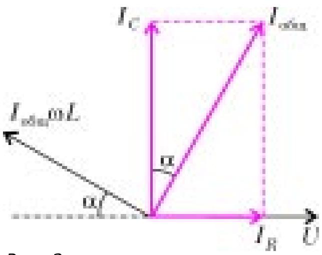


Рис. 2

общий ток (через катушку индуктивности) равен

$$I_{общ} = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}\ .$$

Тогда напряжение на катушке равно $I_{общ}\omega L$, и можно приравнять сумму напряжений катушки и конденсатора с резистором «входному» напряжению U_0 – разумеется, с учетом сдвига фаз между суммируемыми напряжениями:

$$U_0^2 = \left(I_{общ}\omega L\right)^2 + U^2 - 2UI_{общ}\omega L\cos\alpha = U^2\left(\frac{\omega^2 L^2}{R^2} + \omega^4 L^2 C^2 + 1 - 2\omega^2 LC\right),$$

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2\left(\dfrac{L^2}{R^2} - 2LC\right) + \omega^4 L^2 C^2}}\ .$$

Для того чтобы зависимость U от частоты была монотонно убывающей, нужно, чтобы функция под корнем в знаменателе возрастала монотонно с увеличением ω. Можно, конечно, взять производную и заняться вычислениями. Но можно и сразу получить ответ: под корнем в знаменателе стоит обычная квадратичная функция относительно $x = \omega^2$, чтобы у нее не было экстремума при $x \geq 0$, нужно иметь положительный коэффициент при ω^2:

$$\frac{L^2}{R^2} - 2LC > 0\ ,\ \text{или}\ \ R < \sqrt{\frac{L}{2C}}\ .$$

З.Рафаилов

Кушай яблочко, мой свет!

Эта заметка посвящена решению следующей задачи из «Задачника «Кванта»:

М1943. *По кругу расставлено несколько корзин (не меньше трех). Первоначально в одной из них лежит одно яблоко, а остальные корзины пусты. Далее неоднократно проделывают следующее: из какой-либо корзины вынимают яблоко, а взамен кладут по одному яблоку в каждую из двух соседних с ней корзин. При каком количестве корзин можно добиться того, чтобы во всех корзинах яблок стало поровну?*

Начнем традиционно: обозначим число корзин через n и пронумеруем их по часовой стрелке номерами от 1 до n, причем номер 1 присвоим той корзине, где первоначально лежит единственное яблоко. Процесс изъятия яблока из корзины номер i и вложения по яблоку в каждую из двух соседних корзин назовем *ходом из i-й корзины.*

А что дальше? Оказывается, решить задачу не так-то просто даже для небольших n. Правда, промучившись какое-то время, можно достичь внутренней убежденности, что для n = 3 и 4 уравнять яблоки в корзинах невозможно. Но для n = 5 это, наоборот, весьма просто. А именно: сначала делаем ход из 1-й корзины (больше неоткуда). В результате появляется по яблоку во 2-й и 5-й корзинах. Сделаем по ходу из этих корзин. После этого 2-я и 5-я корзины опустеют, зато в 3-й и 4-й будет по одному яблоку, а в 1-й – даже два. Последний ход из 1-й корзины – и все в порядке: в каждой корзине одно яблоко!

С дальнейшим ростом n перебор становится угрожающе велик, и любые лобовые попытки обречены. Похоже, без алгебры не обойтись.

Итак, пусть после нескольких ходов удалось уравнять число яблок в корзинах, и в каждой корзине стало m яблок. Обозначим число ходов, сделанных из i-й корзины, через k_i (для всех i = 1, 2, …, n). Обратим внимание, что после каждого хода, сделанного из какой-либо корзины, количество яблок в ней уменьшается на 1, а после хода из любой соседней корзины количество яблок в ней, наоборот, возрастает на 1. Это позволяет записать следующую вполне очевидную систему из n уравнений, отображающую итоговое количество яблок во всех n корзинах (заодно пронумеруем их сверху вниз номерами от 1 до n):

$$1 + k_n - k_1 + k_2 = m\ , \qquad (1)$$

$$k_1 - k_2 + k_3 = m\ , \qquad (2)$$

$$k_2 - k_3 + k_4 = m\ , \qquad (3)$$

$$\ldots$$

$$k_{n-2} - k_{n-1} + k_n = m\ , \qquad (n-1)$$

$$k_{n-1} - k_n + k_1 = m\ . \qquad (n)$$

Из уравнений (2), (3),…, $(n-1)$ можно последовательно получить

$$k_3 = m - k_1 + k_2\ ,$$

$$k_4 = m - k_2 + k_3 = m - k_2 + \left(m - k_1 + k_2\right) = 2m - k_1\ ,$$

$$k_5 = m - k_3 + k_4 = m - \left(m - k_1 + k_2\right) + \left(2m - k_1\right) = 2m - k_2\ ,$$

$$k_6 = m - k_4 + k_5 = m - \left(2m - k_1\right) + \left(2m - k_2\right) = m + k_1 - k_2\ ,$$

$$k_7 = m - k_5 + k_6 = m - \left(2m - k_2\right) + \left(m + k_1 - k_2\right) = k_1\ ,$$

$$k_8 = m - k_6 + k_7 = m - \left(m + k_1 - k_2\right) + k_1 = k_2\ ,$$

$$\ldots$$

Обратим внимание: k_7 и k_8 оказались равны k_1 и k_2 соответственно. А поскольку в записанных нами равенствах каждое последующее значение k_i зависит только от двух предыдущих, то последовательность чисел k_i – *периодическая* с длиной периода, равной 6. Такое открытие само указывает нам естественный путь продолжения рассуждений: рассмотреть значения n, дающие различные остатки при делении на 6. Очевидно, таких возможностей ровно 6. Разберемся с каждой по порядку.

1) Пусть n при делении на 6 дает остаток 1, т.е. $n = 6p + 7$, где p – целое неотрицательное число. (Почему $6p + 7$, а не $6p + 1$? А потому, что, согласно условию, n не

меньше 3, тогда как $6 \times 0 + 1 < 3$. Поэтому вместо 1 и было взято число 7.)

Тогда, в силу периодичности, $k_n = k_1$, и $k_{n-1} = m + k_1 - k_2$. А теперь подставим значения k_n и k_{n-1} в уравнения (1) и (n), которые нами пока что не использовались. Получим следующую систему:

$$1 + k_1 - k_1 + k_2 = m,$$

$$(m + k_1 - k_2) - k_1 + k_1 = m,$$

откуда $k_1 = k_2 = m - 1$. Далее:

$$k_3 = m - k_1 + k_2 = m,$$

$$k_4 = 2m - k_1 = m + 1,$$

$$k_5 = 2m - k_2 = m + 1,$$

$$k_6 = m + k_1 - k_2 = m.$$

Следующие значения k_i вычислять не будем, так как они уже известны – в силу их периодичности ($k_7 = k_1$ и т.д.). Таким образом, следует сначала задаться каким-либо натуральным m, а затем сделать необходимое (только что найденное) число ходов из каждой корзины – и в корзинах станет яблок поровну. Но каким значением m следует задаться? Очевидно, таким, чтобы все k_i были неотрицательны (количество ходов отрицательным быть не может). В данном случае, как видно, можно задаться величиной $m = 1$ – тогда получается $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_6 = 1$, $k_4 = k_5 = 2$. Вроде бы все в порядке, но... как сделать первый ход? Согласно нашей «раскладке», из первой корзины не должно быть сделано ни одного хода ($k_1 = 0$), но первоначально яблоко имеется только в ней – другие корзины пусты! Как же быть?

Допустим, у нас есть последовательность ходов, в результате которой в каждой корзине оказывается по m яблок. Что произойдет, если, перед тем как сделать первый ход, мы в каждую корзину добавим по d яблок? Очевидно, в конечном итоге в каждой корзине станет по $m + d$ яблок, т.е. опять-таки поровну. Если же мы возьмем такое d, чтобы оно было больше необходимого числа ходов из *любой* корзины, то тогда мы заведомо сможем выполнить все ходы, причем в произвольном порядке – ибо в каждой корзине исходного количества яблок наверняка *хватит* для того, чтобы сделать все ходы.

Что следует из этих как бы отвлеченных рассуждений? В нашем случае наибольшее число ходов – по 2 – надо сделать из 4-й и 5-й корзин. Поэтому если добавить изначально по 2 яблока в каждую корзину, то мы бы отлично уравняли количества яблок в корзинах, сделав из i-й корзины k_i ходов (для всех i от 1 до n), причем ходы могли бы делать в любом порядке. Но как добавить по 2 яблока в каждую корзину, не нарушая условий перекладки? И вообще, можно ли это сделать? Оказывается, да, и притом весьма просто. А именно: сначала просто сделаем по одному ходу поочередно из 1-й, 2-й, ..., n-й корзины. Легко сообразить, что в итоге в каждой корзине число яблок увеличится *ровно* на 1. Потом проделаем это еще раз – и число яблок возрастет еще на 1, т.е. в целом – на 2. Но можно ли проделать такую «круговую» серию ходов – всегда ли в очередной корзине будет яблоко (т.е. не окажется ли она пуста)? Да, всегда. В самом деле – при ходе из 1-й корзины (где яблоко изначально есть) будет вложено яблоко во 2-ю корзину. Поэтому ход из 2-й корзины окажется возможен. Далее, при ходе из 2-й корзины будет вложено яблоко в 3-ю корзину – и ход из 3-й корзины тоже окажется возможен. Ну, и так далее – каждый предыдущий ход обеспечивает возможность сделать следующий.

Резюме: сначала дважды (вообще-то, можно и больше, но смысла нет) «обходим» все корзины по кругу, от 1-й до n-й, делая поочередно ходы из них. После этого в 1-й корзине станет 3 яблока, в остальных – по 2. Затем из корзин с номерами k_3 (а также k_9, k_{15} и т.д.) и k_6 (а также k_{12}, k_{18} и т.д.) делаем по 1 ходу, а из корзин с номерами k_4 (а также k_{10}, k_{16} и т.д.) и k_5 (а также k_{11}, k_{17} и т.д.) – по 2 хода (все эти ходы делаем в любом порядке – яблок в корзинах заведомо хватит). В результате во всех корзинах окажется ровно по 3 яблока.

Как видно, мы очень долго и подробно разбирались со случаем $n = 6p + 7$, но зато далее мы сможем обойтись без лишних подробностей, потому что основные принципы уже ясны.

2) Пусть n при делении на 6 дает остаток 2, т.е. $n = 6p + 8$, где p – целое неотрицательное число.

Тогда, в силу периодичности, $k_n = k_2$ и $k_{n-1} = k_1$. Подставим значения k_n и k_{n-1} в уравнения (1) и (n):

$$1 + k_2 - k_1 + k_2 = m,$$

$$k_1 - k_2 + k_1 = m.$$

Вычитая первое уравнение из второго, после очевидных преобразований получаем $3(k_1 - k_2) = 1$, что невозможно (выражение в левой части делится на 3, а в правой – нет). Поэтому при $n = 6p + 8$ уравнять яблоки в корзинах невозможно.

3) Пусть n при делении на 6 дает остаток 3, т.е. $n = 6p + 3$, где p – целое неотрицательное число.

Тогда, в силу периодичности, $k_n = m - k_1 + k_2$ и $k_{n-1} = k_2$. Подставим значения k_n и k_{n-1} в уравнения (1) и (n):

$$1 + (m - k_1 + k_2) - k_1 + k_2 = m,$$

$$k_2 - (m - k_1 + k_2) + k_1 = m.$$

Из первого уравнения следует $2(k_1 - k_2) = 1$, что невозможно (выражение в левой части делится на 2, а в правой – нет). Поэтому при $n = 6p + 3$ уравнять яблоки в корзинах невозможно.

4) Пусть n при делении на 6 дает остаток 4, т.е. $n = 6p + 4$, где p – целое неотрицательное число.

Тогда, в силу периодичности, $k_n = 2m - k_1$ и $k_{n-1} = m - k_1 + k_2$. Подставим значения k_n и k_{n-1} в уравнения (1) и (n):

$$1 + (2m - k_1) - k_1 + k_2 = m,$$

$$(m - k_1 + k_2) - (2m - k_1) + k_1 = m.$$

После упрощений:

$$-2k_1 + k_2 = -m - 1,$$

$$k_1 + k_2 = 2m.$$

Если второе уравнение умножить на 2 и сложить с первым, получится $3k_2 = 3m - 1$, откуда $3(k_2 - m) = -1$, что невозможно (выражение в левой части делится на 3, а в правой – нет). Поэтому при $n = 6p + 4$ уравнять яблоки в корзинах невозможно.

5) Пусть n при делении на 6 дает остаток 5, т.е. $n = 6p + 5$, где p – целое неотрицательное число.

Тогда, в силу периодичности, $k_n = 2m - k_2$ и $k_{n-1} = 2m - k_1$. Подставим значения k_n и k_{n-1} в уравнения (1) и (n):

$$1 + (2m - k_2) - k_1 + k_2 = m,$$

$$(2m - k_1) - (2m - k_2) + k_1 = m,$$

откуда $k_1 = m + 1$, $k_2 = m$. Далее:

$$k_3 = m - k_1 + k_2 = m - 1,$$

$$k_4 = 2m - k_1 = m - 1,$$

$$k_5 = 2m - k_2 = m,$$

$$k_6 = m + k_1 - k_2 = m + 1.$$

Следующие значения k_i известны в силу их периодичности ($k_7 = k_1$ и т.д.). Теперь действуем аналогично самому первому рассмотренному случаю: сначала задаемся значением m таким, чтобы все k_i были неотрицательны. В данном случае можно задаться величиной $m = 1$ – тогда получается $k_1 = k_6 = 2$, $k_2 = k_5 = 1$, $k_3 = k_4 = 0$. Далее («для надежности») дважды «обходим» все корзины по кругу, от 1-й до n-й, делая поочередно ходы из них. После этого в 1-й корзине станет 3 яблока, в остальных – по 2. Затем из корзин с номерами k_1 (а также k_7, k_{13} и т.д.) и k_6 (а также k_{12}, k_{18} и т.д.) делаем по 2 хода, а из корзин с номерами k_2 (а также k_8, k_{14} и т.д.) и k_5 (а также k_{11}, k_{17} и т.д.) – по 1 ходу (в любом порядке). В результате во всех корзинах станет ровно по 3 яблока.

6) Пусть n делится на 6 без остатка, т.е. $n = 6p + 6$, где p – целое неотрицательное число.

Тогда, в силу периодичности, $k_n = m + k_1 - k_2$ и $k_{n-1} = 2m - k_2$. Подставим значения k_n и k_{n-1} в уравнения (1) и (n):

$$1 + (m + k_1 - k_2) - k_1 + k_2 = m,$$

$$(2m - k_2) - (m + k_1 - k_2) + k_1 = m.$$

Из первого уравнения сразу получается $1 = 0$, что свидетельствует о невозможности уравнивания яблок в корзинах.

Итак, все варианты рассмотрены, и ответ получен: уравнять яблоки в корзинах можно только при числе корзин, равном $6p + 5$ или $6p + 7$, где p – любое целое неотрицательное число. Любители эстетики могут записать ответ изящнее: $6q \pm 1$, где q –любое *натуральное* число.

Рассмотренная задача является своеобразной «кольцевой» вариацией другой задачи, предлагавшейся в 1998 году на заключительном этапе Конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8». Звучала она так:

Ящики расставлены в бесконечный в обе стороны ряд. Первоначально в одном ящике лежит шар, остальные ящики пусты. Разрешается вынуть шар из любого ящика и взамен положить по шару в два соседних с ним ящика. После нескольких таких операций оказалось, что в N подряд расположенных ящиках лежит по одному шару, а остальные ящики пусты. При каких N такое возможно?

Оказывается, ответ здесь единственный: $N = 5$, и порядок перекладки шаров полностью совпадает с рассмотренным выше порядком перекладки яблок для 5 корзин. Доказать, что другие значения N невозможны, несколько сложнее, но зато можно обойтись без рассмотрения систем уравнений. А именно: так как после каждого хода число шаров возрастает на 1 и итоговое число шаров, разумеется, равно N, то всего было сделано $(N - 1)$ ходов. Назовем *шириной* количество ящиков, расположенных в любой момент между самым левым и самым правым непустыми ящиками (включительно). Ясно, что после первого хода ширина становится равной 3. А далее обратим внимание на следующее: если любой последующий ход сделан из крайнего ящика (самого правого или самого левого), то ширина возрастает на 1, а если ход сделан из «внутреннего» ящика, то ширина не меняется. Итоговая ширина равна, очевидно, N. Поэтому после первого хода надо сделать еще ровно $(N - 3)$ ходов из крайних ящиков, и суммарное число ходов из крайних ящиков (включая первый) равно $(N - 2)$. А так как всего было сделано $(N - 1)$ ходов, то ход из внутреннего ящика был один-единственный.

Далее, пусть этот единственный «внутренний» ход был *не последним*. Заметим, что тогда его можно поменять местами со следующим за ним «крайним» ходом без влияния на итоговое расположение шаров (докажите – это несложно). Затем поменяем его со следующим «крайним» ходом и так далее. Таким образом, можно считать, что внутренний ход был *последним*, а все предыдущие ходы сделаны только из крайних ящиков.

А теперь – примечательный факт: справа от левого крайнего ящика всегда расположен пустой ящик, и слева от правого крайнего ящика всегда расположен пустой ящик. Справедливость этого утверждения основывается на том, что в каждом крайнем ящике всегда ровно 1 шар. И впрямь: когда образуется новый крайний ящик, в нем появляется 1 шар, а второй шар может появиться в нем только после хода из соседнего *внутреннего* ящика. Но единственный внутренний ход мы отнесли в самый конец. Ну, раз в крайнем ящике 1 шар, то после хода из него возникнет новый крайний ящик (рядом с ним, левее или правее), а ящик, из которого сделан ход, пустеет. Так что перед самым последним ходом имеется как минимум два пустых ящика, рядом с крайними, и оба нужно заполнить. Но такое возможно, только если эти пустые ящики разделены единственным непустым, ход из которого позволяет положить по шару в *каждый* из них. Посему итоговое число ящиков с шарами может равняться только 5 – и ничему другому.

Читатель, конечно, обратил внимание, что в «новой» задаче речь шла об одинаковом итоговом количестве яблок в корзинах, а в «старой» – об одном шаре в каждом ящике. Ясно ощущается некоторая незавершенность. Поэтому имеет смысл обобщить и старую задачу, переформулировав ее так:

Ящики расставлены в бесконечный в обе стороны ряд. Первоначально в одном ящике лежит шар, остальные ящики пусты. Разрешается вынуть шар из любого ящика и взамен положить по шару в два соседних с ним ящика. После нескольких таких операций оказалось, что в N подряд расположенных ящиках лежит по одинаковому количеству шаров, а остальные ящики пусты. При каких N такое возможно?

Решение этой задачи автору неизвестно.

И.Акулич

Задачи

1. Профессор Мумбум-Плюмбум пытается найти треугольник, медиана которого делит его на два подобных между собой, но не равных друг другу треугольника. Удастся ли ему это сделать?

И.Акулич

2. Я забыл домашний номер телефона моего приятеля, но точно помню, что в его семизначном номере все цифры различны, квадраты трех из них равны произ-

ведению двух соседних с ними цифр, а само семизначное число без остатка делится на 36. Какой номер телефона у моего приятеля?

А.Ряховский

3. Известно, что среди $2n + 1$ последовательных натуральных чисел сумма первых $n + 1$ чисел равна сумме остальных. Докажите, что наименьшее из этих чисел является полным квадратом.

В.Брагин (ученик 7 кл.)

4. На двух чашках весов лежат гирьки так, что весы показывают равновесие. Все эти гирьки разложили по чашкам иначе, но так, что весы вновь показали равновесие. В третий раз на левую чашку поместили только

те гирьки, которые оба раза уже были на ней. И на правой чашке оставили только те гирьки, которые оба раза уже были на ней. Будет ли вновь на весах равновесие?

В.Произволов

5. Пете дали квадрат 8×8, в котором изначально были закрашены 7 клеток, и разрешили закрашивать другие клетки, руководствуясь следующим правилом. Если незакрашенная клетка граничит сторонами (не вершинами) с двумя закрашенными ранее клетками, то ее также можно закрасить. Может ли случиться так, что Петя закрасит весь квадрат?

Из задач Израильских олимпиад

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 расположены на двух окружностях так, как показано на рисунке 1. За один шаг можно сдвинуть стоящие на одной окружности четыре цифры по кругу так, чтобы каждая из них заняла место соседней с ней цифры. Можно ли за несколько шагов добиться того, чтобы цифры 1 и 6 поменялись местами, а все остальные цифры оказались на первоначальных местах?

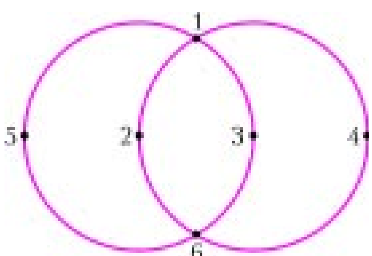


Рис. 1

И.Игнатович

2. Известно, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^3 + y^3 + z^3 = -1$, $x^5 + y^5 + z^5 = -1$. Чему равно $x + y + z$?

П.Самовол, М.Аппельбаум

3. Докажите, что среди любых семи целых чисел найдутся четыре числа a, b, x, y такие, что $ab - xy$ делится на 7.

В.Каскевич

4. На плоскости проведено несколько прямых, которые, пересекаясь между собой, образуют несколько не перекрывающих друг друга пятиконечных звезд. Например, на рисунке 2 девять прямых образуют три звезды. А может личис ло таких звезд оказаться больше числа прямых?

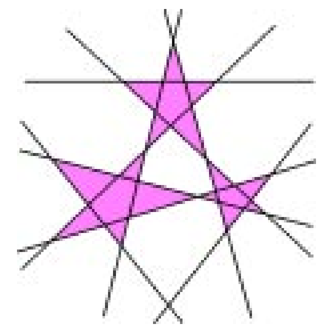


Рис. 2

Н.Авилов

5. Натуральное число назовем четнолюбивым, если каждая его цифра, стоящая на четном месте, не меньше любой соседней с ней цифры (номер места цифры отсчитывается слева направо). Назовем также натуральное число нечетнолюбивым, если каждая цифра, стоящая на нечетном месте, не меньше любой соседней с ней цифры. Однозначные числа, для которых невозможно сравнить соседние цифры, будем считать одновременно и четнолюбивыми, и нечетнолюбивыми.

Верно ли, что:

а) любое четнолюбивое число, большее 1, можно представить в виде суммы двух нечетнолюбивых чисел;

б) любое нечетнолюбивое число, большее 1, можно представить в виде суммы двух четнолюбивых чисел?

И.Акулич

Об одном математическом случае

С.ДВОРЯНИНОВ

Откуда берутся новые задачи

Из нынешних читателей «Кванта» немногим, наверное, знакома книга «Рассказы о решении задач». Вышла она в свет в 1957 году в Ленинграде в издательстве «Детская литература» (в серии «В помощь школьнику»). Автор книги – Иван Яковлевич Депман. Содержательная и интересная книга написана замечательно – ее страницы содержат умный и внимательный разговор автора с читателем. Здесь много примечательных фактов. Так, мы узнаем, что одним из учителей автора книги был лаборант Петербургского университета, близкий родственник великого русского поэта М.Ю.Лермонтова. Такая вот неожиданная связь людей и времен...

Приведем несколько заключительных строк из этой книги:

«М.Горький в 1934 году обратился к ребятам с вопросом: какие книги они хотели бы иметь?

Из нескольких тысяч ответов Горькому особенно понравился ответ тринадцатилетней девочки:

“Мы хотим книжек... не вроде описания, а в случаях”.

Девочка этим выразила пожелание, чтобы книга рассказывала не о вещах вообще, а о том, что действительно существует; чтобы книга показывала практически, как то или иное надо делать.

Мы в нашей книге не излагали дополнительных к школьному курсу сведений, которым нет конца, а стремились показать на примерах, «на случаях», как вдумчивое использование самых начальных сведений по математике позволяет решать задачи, которые на первый взгляд кажутся весьма трудными».

Руководствуясь таким подходом, расскажем на языке математики об одном любопытном *случае*.

Об одной классической задаче из элементарной геометрии

Представим себе, что к вертикальной стене прислонена лестница. На средней ступеньке лестницы сидит котенок *K*. Основание лестницы начинает скользить по горизонтальной плоскости. Какой при этом будет траектория котенка, т.е. точки *K*?

Математическая формулировка задачи очевидна (рис.1):

Отрезок прямой ВН перемещается по плоскости так, что его концы постоянно остаются на сторонах прямого угла (В – верхняя точка отрезка). Какую линию описывает при этом середина К отрезка?

Мы не сомневаемся, что многие читатели с этой задачей встречались. Если для кого-то задача является новой, то решить ее несложно.

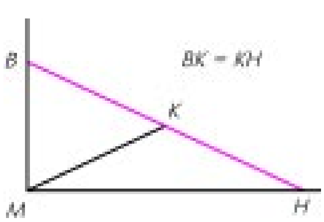


Рис. 1

Достаточно вспомнить, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Поэтому при движении отрезка внутри прямого угла расстояние от середины отрезка до вершины прямого угла остается неизменным. Следовательно, середина движущегося отрезка – точка *K* – описывает четверть окружности.

Траектория котенка определена, если, разумеется, он действительно останется на лестнице, а не прыгнет от испуга куда-нибудь совершенно непредсказуемым образом.

Новые задачи

Не секрет, что одним из способов составления новых задач является обобщение уже известных. Давайте посмотрим, что можно придумать еще, исходя из нашей лестницы.

Интересно, пожалуй, выяснить, какой будет траектория *произвольной* точки *K* движущегося таким образом внутри прямого угла отрезка *ВН*.

Это – нормальная математическая задачка, лучше сказать – упражнение. Решать сейчас эту задачу нашим читателям – младшим школьникам – совсем необязательно. Лучше вернуться к ней в 10–11 классах, когда будет освоен метод координат решения геометрических задач. О получаемой же кривой мы скажем совсем немного.

Заметим, что несложно провести математический эксперимент и построить несколько точек этой кривой. Следует лишь нарисовать прямой угол и несколько

(Продолжение см. на с. 34)

Неравенства в тетраэдрах

Калейдоскоп «Кванта» во втором номере журнала за этот год был посвящен неравенствам между элементами простейшего из многоугольников – треугольника. Очень интересные (порой весьма трудно доказываемые) неравенства связывают элементы простейшего многогранника – тетраэдра. С ними мы и хотим вас познакомить. Вы, конечно, заметите, что некоторые из неравенств для тетраэдра являются обобщениями соответствующих неравенств для треугольника.

Возьмем произвольный тетраэдр $ABCD$. Длины его ребер будем обозначать так, как показано на рисунке 1. Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной сфер тетраэдра, V – его объем, S – площадь (полной) поверхности, $\Pi = 2P$ – периметр, т.е. сумма его ребер (а P – полупериметр), S_A, S_B, S_C, S_D – площади граней, противолежащих вершинам A, B, C и D соответственно. Пусть также $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – радианные меры двугранных углов при ребрах тетраэдрах a, b, c, a_1, b_1, c_1 соответственно.

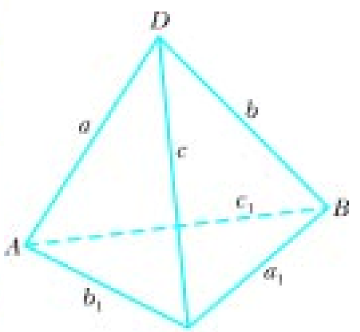


Рис. 1

Начнем с формулировки двух замечательных теорем.

1. Периметр всякого сечения тетраэдра не превосходит наибольшего из периметров его граней.

2. Площадь всякого сечения тетраэдра не больше максимальной площади его граней.

Каждое из этих утверждений можно рассматривать как естественное обобщение почти очевидного факта: длина отрезка с концами на контуре треугольника не превосходит длины его наибольшей стороны. (Второму утверждению была посвящена статья в Б.Каневского и Э.Линденштрауса «Площадь сечения тетраэдра» в «Кванте» №6 за 2004 г.)

Вы, конечно, знаете, что если треугольник $A_1B_1C_1$ содержится в треугольнике ABC (рис.2), то периметр второго треугольника больше периметра первого. Однако для тетраэдров это не так. А именно, существуют тетраэдр $ABCD$ и тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$, содержащийся в тетраэдре $ABCD$, такие, что $\Pi_{A_1B_1C_1D_1} > \Pi_{ABCD}$. Пример показан на рисунке 3. Здесь $ABCD$ – правильная треугольная пирамида с очень маленькими сторонами основания и очень большой высотой, равной a. Возьмем две точки C_1 и D_1, очень близкие к вершине D, и точки A_1 и B_1, лежащие в грани ABC, так, чтобы четыре точки A_1, B_1, C_1 и D_1 не лежали в одной плоскости. Периметр тетраэдра $ABCD$ близок к $3a$, а периметр тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ близок к $4a$ и, следовательно, больше периметра тетраэдра $ABCD$.

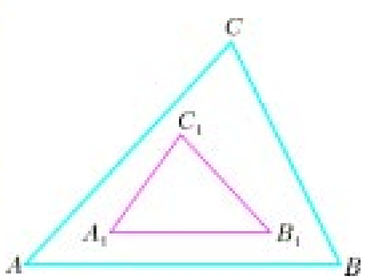


Рис. 2

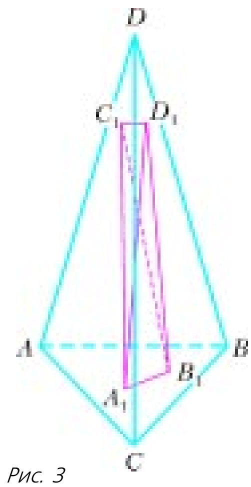


Рис. 3

Тем более интересно такое неравенство:

3. Если тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ содержится в тетраэдре $ABCD$, то

$$\frac{4}{3}\Pi_{ABCD} > \Pi_{A_1B_1C_1D_1}.$$

(Доказательство приведено в статье В.Тихомирова «Об одной олимпиадной задаче» в «Кванте» №1 за 1983 г.)

Следующее неравенство дает оценку «среднего значения» двугранных углов тетраэдра и является обобщением соответствующего неравенства для треугольника:

4. $$\frac{\pi}{3} < \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1}{a + b + c + a_1 + b_1 + c_1} < \frac{\pi}{2}.$$

Это неравенство является точным в том смысле, что данное отношение может быть сколь угодно близким как к $\frac{\pi}{3}$ (например, для тетраэдра $ABCD$ на рисунке 3), так и к $\frac{\pi}{2}$ (для тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ на рисунке 3 при условии, что ребра A_1B_1 и C_1D_1 перпендикулярны).

Известно, что для любого треугольника радиусы вписанной и описанной окружностей связаны неравенством $2r \le R$. Аналогичное неравенство имеет место и для любого тетраэдра:

5. $3r \le R$.

Равенство здесь возможно лишь для правильного тетраэдра.

Теперь перейдем к неравенствам между объемом, радиусом описанной сферы, периметром и площадью поверхности тетраэдра. Эти неравенства позволят нам обнаружить замечательные экстремальные свойства правильного тетраэдра.

6. $V \le \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$,

причем равенство имеет место лишь в том случае, если тетраэдр правильный. Отсюда, в частности, следует, что из всех тетраэдров, вписанных в данную сферу, наибольший объем имеет правильный и, наоборот, из всех тетраэдров данного объема наименьший радиус описанной сферы имеет правильный тетраэдр.

7. $S \geq 6\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}$,

причем равенство опять возможно только для правильного тетраэдра. Это неравенство называется изопериметрическим. Из него следует, что из всех тетраэдров с данной площадью поверхности наибольший объем имеет правильный, а из всех тетраэдров данного объема правильный имеет наименьшую площадь поверхности.

8. $P \geq 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3V}$.

Как и в предыдущих случаях, равенство возможно только если тетраэдр правильный. Соответствующее экстремальное свойство сформулируйте самостоятельно.

Неравенства 5–8 можно записать в виде цепочки:

9. $r \leq \frac{\sqrt[3]{9\sqrt{3}V}}{6} \leq \frac{\sqrt{2\sqrt{3}S}}{12} \leq \frac{\sqrt{6}}{36}P \leq \frac{1}{3}R$.

А так как равенства возможны только для правильного тетраэдра, из этих неравенств следуют в общей сложности 6 экстремальных свойств правильного тетраэдра.

Из цепочки 9 следует, в частности, что

10. $P^2 \geq 3\sqrt{3}S$.

Вот еще одно неравенство, уточняющее предыдущее:

11. $$P^2 \geq 3\sqrt{3}S + \frac{1}{2}\Big(\left(a + a_1 - b - b_1\right)^2 + \left(a + a_1 - c - c_1\right)^2 + \left(b + b_1 - c - c_1\right)^2\Big) + \frac{3}{4}\Big(\left(a - a_1\right)^2 + \left(b - b_1\right)^2 + \left(c - c_1\right)^2\Big).$$

Равенство достигается, как мы уже привыкли, лишь для правильного тетраэдра.

Пусть теперь R_A, R_B, R_C, R_D (рис.4) – расстояния от точки M внутри тетраэдра $ABCD$ до вершин A, B, C и D соответственно. Тогда

12. $R_A + R_B + R_C + R_D \geq 12r$,

13. $R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 + R_D^2 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}S$,

14. $R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 + R_D^2 \geq \frac{1}{6}P^2$.

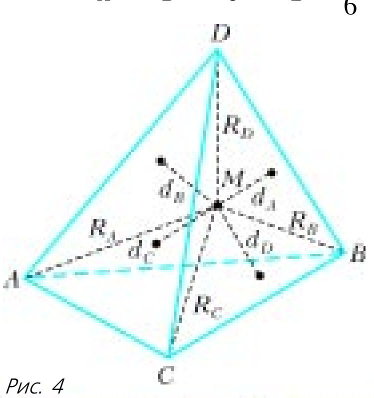


Рис. 4

Равенство в выражениях 12–14 возможно только тогда, когда тетраэдр правильный, а точка M – его центр.

Обозначим через d_A, d_B, d_C, d_D (см. рис. 4) расстояния от точки M внутри тетраэдра $ABCD$ до граней, противолежащих вершинам A, B, C и D, а через h_A, h_B, h_C, h_D – высоты, опущенные из этих вершин на противоположные грани. Тогда

15. $$\min\left(h_A, h_B, h_C, h_D\right) \leq d_A + d_B + d_C + d_D \leq \max\left(h_A, h_B, h_C, h_D\right).$$

Равенство

$$\min\left(h_A, h_B, h_C, h_D\right) = d_A + d_B + d_C + d_D$$

выполняется лишь для вершины A тетраэдра, если $S_A > S_B \geq S_C \geq S_D$; для любой точки M ребра AB, если $S_A = S_B > S_C \geq S_D$; для любой точки M грани ABC, если $S_A = S_B = S_C > S_D$; для любой точки M внутри или на границе тетраэдра, если $S_A = S_B = S_C = S_D$, т.е. если тетраэдр равногранный (у него $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$).

Аналогично устанавливаются условия равенства

$$d_A + d_B + d_C + d_B = \max\left(h_A, h_B, h_C, h_D\right).$$

Сформулируйте и докажите эти условия самостоятельно.

Интересно и такое неравенство для любой точки M внутри тетраэдра $ABCD$:

16. $R_A R_B R_C R_D \geq 81 d_A d_B d_C d_D$.

Равенство достигается лишь для правильного тетраэдра и его центра M.

Известное для треугольника неравенство Эрдеша–Морделла $R_A + R_B + R_C \geq 2\left(d_A + d_B + d_C\right)$ нетривиально обобщается на пространство. Американский математик Д.Казаринов доказал, что для любого тетраэдра и любой точки M внутри него

17. $R_A + R_B + R_C + R_D > 2\sqrt{2}\left(d_A + d_B + d_C + d_D\right)$.

Последнее неравенство не улучшаемо! Это – замечательный результат, так как поначалу математики ожидали, что, по аналогии с треугольником,

$$R_A + R_B + R_C + R_D \geq 3\left(d_A + d_B + d_C + d_D\right).$$

И, наконец, еще два приятных неравенства:

18. $\left(R_A + R_B + R_C + R_D\right)\left(\frac{1}{d_A} + \frac{1}{d_B} + \frac{1}{d_C} + \frac{1}{d_d}\right) \geq 48$,

19. $$\left(R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 + R_D^2\right) \times \left(\frac{1}{d_A^2} + \frac{1}{d_B^2} + \frac{1}{d_C^2} + \frac{1}{d_D^2}\right) \geq 144.$$

Эти неравенства превращаются в равенства лишь для правильного тетраэдра и его центра.

Подробные доказательства большинства неравенств между элементами тетраэдра содержатся в книге Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова, И.М.Яглома «Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум» (М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970). В этой книге, кроме большого числа неравенств, есть много замечательных задач, и мы настоятельно рекомендуем читателю с ней познакомиться.

А.Егоров

(Начало см. на с. 30)

отрезков равной длины с концами на сторонах этого прямого угла. Затем нужно отметить середины всех этих отрезков и плавно соединить их гладкой кривой. Получится дуга. Если такие дуги нарисовать для четырех прямых углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми, то образуется линия, которую называют *эллипсом*. Любой эллипс (рис.2) получается из подходящей окружности сжатием вдоль ее диаметра или растяжением.

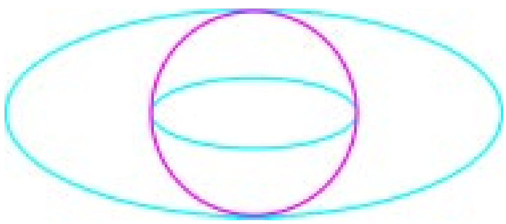


Рис. 2

Чем дальше точка движущегося по сторонам прямого угла отрезка отстоит от середины этого отрезка, тем более вытянут (или сжат) будет эллипс. Степень сжатия характеризуется одним параметром, который имеет красивое звучное название – *эксцентриситет*. У окружности, например, эксцентриситет равен 1.

Проявим настойчивость и придумаем еще одну задачу про лестницу.

Пусть лестница стоит на горизонтальной плоскости и прислонена к стене. Ясно, что под действием силы тяжести лестница начнет скользить и в конце концов упадет.

Предположим, что произвольную точку K этой лестницы можно соединить натянутой веревкой с вершиной прямого угла – точкой M. Совершенно ясно, что если в качестве точки K взять самую нижнюю точку лестницы, то веревка будет удерживать лестницу от падения, и лестница останется неподвижной. Действительно, при падении (так мы будем называть скольжение лестницы) расстояние от точки K до точки M должно увеличиваться, а веревка этому препятствует.

Следовательно, при закреплении веревки в некоторой точке K падение происходит тогда, когда длина отрезка MK при этом падении уменьшается, т.е. точка K приближается к точке M. Так, если в качестве точки K взять самую верхнюю точку лестницы и ее соединить веревкой с точкой M, то такое соединение помешать падению лестницы никак не сможет – при падении лестницы расстояние KM монотонно уменьшается до нуля.

Исследуем, как надо выбрать точку K на лестнице, чтобы

а) лестница не скользила;

б) веревка при этом имела наименьшую возможную длину.

Среди многих известных подходов, с которых обычно начинают решение задач, есть и такой: *рассмотреть крайние (предельные) случаи*. В нашем варианте лестницы с веревкой крайних случаев два: K – самая нижняя или же самая верхняя точки на лестнице, и оба их мы уже рассмотрели. В первом случае лестница не скользит по плоскости (правда, веревка не является при этом наикратчайшей).

Это – один из ответов на вопрос а).

Давайте еще вспомним котенка, сидящего на середине лестницы. Ясно, что веревка, идущая из середины лестницы, падению лестницы не мешает (при падении лестницы длина отрезка KM не меняется).

Итак, вопрос а) задачи имеет смысл, ибо при выборе разных точек K на лестнице эффект от веревки разный: веревка либо удерживает лестницу от падения, либо нет.

Теперь читатели имеют по крайней мере две возможности. Можно дождаться следующего номера журнала и узнать то решение, которое предлагает автор. А можно взять в руки бумагу и карандаш и решить задачу самостоятельно, а потом сверить свое решение с авторским.

По этому поводу приведем выдержку из упомянутой выше книги И.Я.Депмана:

«Самым же лучшим будет тот вывод, который вы придумаете сами. Эта возможность отнюдь не исключена. Профессор Василий Петрович Ермаков, весьма известный в высшей математике и много делавший также для улучшения преподавания математики в школе, владел особым способом чтения математических книг. Он читал первую страницу новой книги, чтобы узнать, какую задачу ставит себе автор, затем последнюю страницу, чтобы узнать, к какому результату автор приходит, и, закрыв книгу, самостоятельно находил путь получения результата. Не раз способ решения, найденный таким образом Ермаковым, оказывался отличным от того, которым пользовался автор книги. Наука в таких случаях обогащалась новыми методами.

Желательно, чтобы школьник, читая рассказы о решении новых для него задач, поступал по способу профессора Ермакова, стараясь каждый раз самостоятельно найти решение задачи или, что еще лучше, дать свой оригинальный способ решения. С таких попыток самостоятельного решения задач началась творческая работа почти всех крупных математиков».

(Окончание следует)

Неравенства с модулем

В.ГОЛУБЕВ

Основной метод (а зачастую и единственный) решения неравенств, предлагаемый авторами большинства учебников и пособий для поступающих, – метод интервалов. Однако есть неравенства (о них прекрасно знают авторы задач конкурсных экзаменов), которые невозможно решить методом интервалов. Например, попробуйте решить этим методом неравенство

$$\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0 . \qquad (1)$$

Очевидно, что решение уравнения $x^3 - x^2 + 4 = 0$ недоступно школьнику.

Естественно выяснить два вопроса:

1) как иначе решать неравенства с модулем;

2) как порождать подобные неравенства?

Предварительно укажем вариант ответа на второй вопрос, чтобы узнать удивительные возможности, предоставляемые понятием «абсолютная величина числа» (или модуль числа).

Системы и совокупности неравенств

Пусть дана *система* одноименных неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) < 0, \\ f_2(x) < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Если x_0 – решение этой системы, то все значения функций $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0)$ отрицательны, и наоборот.

Согласитесь, что если некоторое значение $f_k(x_0)$ есть наибольшее из чисел $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0)$ и оно отрицательно, то все остальные также отрицательны, и наоборот. Поэтому непонятно, почему, когда вместо решения системы (2) предлагают решить одно неравенство

$$\max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} < 0 , \qquad (3)$$

многие попадают впросак, не осознавая возможности перехода от неравенства (3) к равносильной ему системе (2). Или другая формулировка: найдите все значения x, при которых наибольшее из значений функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ отрицательно.

Упражнение 1. Докажите следующие правила «минимакса»:

1) $\begin{cases} f_1 < 0, \\ f_2 < 0, \\ \ldots\ldots \\ f_n < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} < 0$;

2) $\begin{cases} f_1 \le 0, \\ f_2 \le 0, \\ \ldots\ldots \\ f_n \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \le 0$;

3) $\begin{cases} f_1 \ge 0, \\ f_2 \ge 0, \\ \ldots\ldots \\ f_n \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \ge 0$;

4) $\begin{cases} f_1 > 0, \\ f_2 > 0, \\ \ldots\ldots \\ f_n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} > 0$.

Аналогично — для *совокупностей* одноименных неравенств.

Упражнение 2. Докажите, что

1) $\left[\begin{array}{l} f_1(x) < 0 \\ f_2(x) < 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} < 0$;

2) $\left[\begin{array}{l} f_1(x) \le 0 \\ f_2(x) \le 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \le 0$;

3) $\left[\begin{array}{l} f_1(x) \ge 0, \\ f_2(x) \ge 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \ge 0$;

4) $\left[\begin{array}{l} f_1(x) > 0 \\ f_2(x) > 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} > 0$.

Правила «минимакса» объявляют равносильные переходы от произвольной системы или совокупности одноименных неравенств к одному неравенству того же вида. Осталось сказать, что система (как и совокупность) *любых*, не обязательно одноименных, уравнений и неравенств сводима к *любой* системе (или совокупности соответственно) одноименных неравенств, так как истинны следующие утверждения.

У1: $f < 0 \Leftrightarrow \dfrac{f}{|f|} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{f}{|f|} + 1 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{f}{|f|} \ge 0 \Leftrightarrow -f > 0$;

У2: $f \le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{-f} - 1 < 0 \Leftrightarrow |f| + f = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{-f} + 1 > 0$;

У3: $f = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{-|f|} - 1 < 0 \Leftrightarrow |f| \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -|f| \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{-|f|} + 1 > 0$;

У4: $f \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{f} - 1 < 0 \Leftrightarrow -f \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |f| - f = 0 \Leftrightarrow \sqrt{f} + 1 > 0$;

У5: $f > 0 \Leftrightarrow -f < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{f}{|f|} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{f}{|f|} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f}{|f|} \ge 0$.

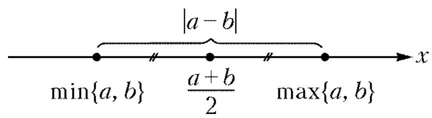
Упражнение 3. Докажите утверждения У1–У5, в которых показаны варианты перевода одного сравнения в любое (!) другое.

Напрашивается вывод: *любую* систему или совокупность можно представить в виде *одного* сравнения максимума, или, если хотите, минимума, с любой константой ($\max f(x) = -\min(-f(x))$).

А при чем тут модуль?

Ответ: любой максимум (минимум) можно выразить через модуль.

Пусть a и b – два произвольных числа. Очевидно, что одно из них есть наименьшее, а другое – наибольшее (если, например, $a \le b$, то $\min(a,b) = a$ и $\max(a,b) = b$). Им соответствуют две точки на числовой оси:



Известно, что расстояние между точками a и b есть $|a-b|$, середина между ними всегда соответствует числу $\dfrac{a+b}{2}$. Поэтому

$$\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}|a-b|, \qquad (4)$$

$$\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|. \qquad (5)$$

Упражнение 4. Докажите, что

$$|a| = \max\{-a,a\} \text{ и } |a| = -\min\{-a,a\}.$$

Мы уже почти готовы неравенство (3) переписать в модулях. Для этого осталось заметить, что поиск максимума (минимума) среди n величин можно свести к последовательности шагов, на каждом из которых определяется максимум (минимум) среди двух.

Пусть

$$M_k = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}.$$

Тогда

$$M_{k+1} = \max\{M_k, f_{k+1}\}. \qquad (6.1)$$

Аналогично для минимума:

$$m_{k+1} = \min\{m_k, f_{k+1}\}, \qquad (6.2)$$

где $m_k = \min\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$.

Упражнение 5. Докажите, что

1) $\max\{f_1,f_2,f_3\} = \max\{f_3, \max\{f_1,f_2\}\}$;

2) $\max\{f_1,f_2,f_3\} =$
$$= \frac{1}{4}\left(2f_3 + f_1 + f_2 + |f_1 - f_2| + \big|2f_3 - f_1 - f_2 - |f_1 - f_2|\big|\right);$$

3) $2f_3 + f_1 + f_2 + |f_1 - f_2| + \big|2f_3 - f_1 - f_2 - |f_1 - f_2|\big| \vee 0 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow 2f_1 + f_2 + f_3 + |f_2 - f_3| + \big|2f_1 - f_2 - f_3 - |f_2 - f_3|\big| \vee 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2f_2 + f_3 + f_1 + |f_3 - f_1| + \big|2f_2 - f_3 - f_1 - |f_3 - f_1|\big| \vee 0.$$

Теперь легко объяснить, как мы получили неравенство (1).

Взяли два общедоступных неравенства $f_1 \le 0$ и $f_2 \le 0$, где $f_1 = x^3 - x^2 - x + 1$ и $f_2 = -x - 3$. Тогда, согласно (4) и упражнению 1,

$$\begin{cases} f_1 \le 0, \\ f_2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow f_1 + f_2 + |f_1 - f_2| \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0,$$

что и требовалось.

Дальнейшее «нагромождение» модулей можно осуществлять по такой схеме. Пусть $f \le 0$ и $g \le 0$ есть *любые* неравенства с модулями, которые мы умеем решать. Тогда для их системы или совокупности получаем, что

$$\begin{cases} f \le 0, \\ g \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow f + g + |f - g| \le 0, \qquad (7)$$

$$\left[\begin{array}{l} f \le 0 \\ g \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow f + g - |f - g| \le 0. \qquad (8)$$

Неравенства справа и есть искомые.

Например, пусть

$$f = \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - x^2 - 2x - 2 \text{ и } g = x^2 - x - 6.$$

Тогда

$$\begin{cases} f \le 0, \\ g \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Big|\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 2x^2 - x + 4\Big| +$$
$$+ \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 3x - 8 \le 0. \qquad (9)$$

Упражнение 6. Напишите, согласно (7) и (8), неравенства, равносильные следующим системам и совокупностям, используя в некоторых ситуациях утверждения У1–У5:

1) $\begin{cases} |5x-1| < 3, \\ |3-7x| < 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |5x-1| > 3, \\ |3-7x| > 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |5x-1| < 3, \\ |3-7x| > 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} |5x-1| > 3, \\ |3-7x| < 1; \end{cases}$ 5) $\left[\begin{array}{l} \left|x^2+4x+3\right| > x+3 \\ \left|x^2-6x+8\right| > 4-x; \end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l} \left|x^2+4x+3\right| < x+3 \\ \left|x^2-6x+8\right| < 4-x; \end{array}\right.$ 7) $\left[\begin{array}{l} \left|x^2+4x+3\right| < x+3 \\ \left|x^2-6x+8\right| > 4-x; \end{array}\right.$

8) $\left[\begin{array}{l} \left|x^2+4x+3\right| > x+3 \\ \left|x^2-6x+8\right| < 4-x. \end{array}\right.$

Перейдем теперь к ответу на первый ранее сформулированный вопрос.

«Меньше», «меньше или равно» – система, «больше», «больше или равно» – совокупность

Чтобы заинтересовать читателя, рассмотрим без каких-либо обоснований такое решение неравенства (9):

$$\Big|\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 2x^2 - x + 4\Big| +$$
$$+ \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 3x - 8 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 2x^2 - x + 4\right) + \\ \quad + \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 3x - 8 \le 0, \\ -\left(\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 2x^2 - x + 4\right) + \\ \quad + \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 3x - 8 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0, \\ x^2 - x - 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^3 - x^2 + 4\right) + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0, \\ -\left(x^3 - x^2 + 4\right) + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0, \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 \le 0, \\ -x - 3 \le 0, \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \text{ ,л, } x = 1, \\ x \ge -3, \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \le x \le -1 \text{ или } x = 1.$$

Ответ: $-2 \le x \le -1$, $x = 1$.

Всем известно, что

$$|f| < g \Leftrightarrow -g < f < g,$$

$$|f| \le g \Leftrightarrow -g \le f \le g\ ,$$

$$|f| \ge g \Leftrightarrow f \le -g \text{ или } f \ge g\ ,$$

$$|f| > g \Leftrightarrow f < -g \text{ или } f > g.$$

Однако, переписав данные утверждения в виде

$$|f| < g \Leftrightarrow \begin{cases} f < g, \\ -f < g, \end{cases}$$

$$|f| \le g \Leftrightarrow \begin{cases} f \le g, \\ -f \le g, \end{cases}$$

$$|f| \ge g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f \ge g \\ -f \ge g, \end{array}\right.$$

$$|f| > g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f > g \\ -f > g, \end{array}\right.$$

мы обнаруживаем, что при решении *любого* основного неравенства с модулем можно перейти к двум неравенствам, *просто заменив* модуль на плюс-минус подмодульное выражение, а затем перейти в зависимости от знака неравенства либо к системе, либо к совокупности. В этом весь фокус!

Для удобства восприятия сведем полученные сведения в таблицу равносильных преобразований основных неравенств с модулем:

(1)	(2)	(3)	(4)
$\|f\| < g$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} f < g, \\ -f < g \end{cases}$	$\|f\| \le g$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} f \le g, \\ -f \le g \end{cases}$	$\|f\| \ge g$ $\Updownarrow$ $\left[\begin{array}{l} f \ge g \\ -f \ge g \end{array}\right.$	$\|f\| > g$ $\Updownarrow$ $\left[\begin{array}{l} f > g \\ -f > g \end{array}\right.$

Для всех сравнений $|f|$ заменяется на f или $-f$, в сравнениях типа «меньше», «меньше или равно» берется система, а в сравнениях типа «больше», «больше или равно» – совокупность.

Упражнение 7. Решите методом интервалов и методом равносильных преобразований (согласно таблице) следующие неравенства:

1) $\left|2x^3 - x^2 + 3\right| \le 2x^3 - 3$;
2) $\left|2x^3 - x^2 + 3\right| \ge 3 - 2x^3$;
3) $\left|3x^4 - 12x^3 - 17x^2 - 2x\right| \le 3x^4 - 3$;
4) $\left|x^4 + 2x^3 - 24x^2 - 18x + 135\right| > x^4 - 81$;
5) $\left|\left|x^2 - 4x + 3\right| - 3\right| \ge x + 2$;
6) $\left|\left|x^2 + 6x + 5\right| - 3\right| \le -x - 2$.

Так как $|m|^2 = m^2$, то для сравнений $|f| \vee |g|$ очевидно наиболее эффективной схемой является такая:

$$|f| \vee |g| \Leftrightarrow f^2 \vee g^2 \Leftrightarrow (f-g)(f+g) \vee 0\ .$$

Упражнение 8. Решите неравенства

1) $\left|x^2 + 5x + 6\right| > |3x + 6|$;
2) $\left|x^2 - 7x + 6\right| \le |4x - 4|$;
3) $\left|3x^2 + x + 26\right| > |x + 2|$;
4) $\left|5x^3 + x^2 + 4\right| \le \left|x^2 + 3x + 2\right|$;
5) $\left|x^3 - 3x + 1\right| \le \left|x^3 + x^2 - 1\right|$.

Таблица равносильных преобразований позволяет сформулировать два очень эффективных правила.

Правило «меньше, меньше или равно – система» ($<, \le \to \{$): *если относительно данного модуля неравенство является неравенством вида «меньше», «меньше или равно», то замените модуль на плюс-минус подмодульное выражение и полученные неравенства рассматривайте одновременно, т.е. в системе.*

Правило «больше, больше или равно – совокупность» ($>, \ge \to [$): *если относительно данного модуля неравенство является неравенством вида «больше», «больше или равно», то замените модуль на плюс-минус подмодульное выражение и полученные неравенства рассматривайте в совокупности.*

Посмотрите, как лихо решается, например, такая задача.

Задача 1. *Для всех значений параметра p решите неравенство*

$$3|x - p| + 5|x - 3p| + 4x + 6p + 12 \le 0\ . \qquad (*)$$

Решение.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-p) + 5(x-3p) + 4x + 6p + 12 \le 0, & (10.1) \\ 3(x-p) - 5(x-3p) + 4x + 6p + 12 \le 0, & (10.2) \\ -3(x-p) + 5(x-3p) + 4x + 6p + 12 \le 0, & (10.3) \\ -3(x-p) - 5(x-3p) + 4x + 6p + 12 \le 0 & (10.4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 12p + 12 \le 0, \\ 2x + 18p + 12 \le 0, \\ 6x - 6p + 12 \le 0, \\ -4x + 24p + 12 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le p - 1, \\ x \le -9p - 6, \\ x \le p - 2, \\ 6p + 3 \le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le p - 2, \\ x \le -9p - 6, \\ 6p + 3 \le x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \le -1, \\ 6p + 3 \le x \le p - 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p > -1, \\ x \in \varnothing, \end{cases}$$

поскольку

$$\begin{cases} 6p + 3 \le p - 2, \\ 6p + 3 \le -9 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \le -1, \\ p \le -0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow p \le -1 \Rightarrow p - 2 < -9 - 6\ .$$

Ответ: если $p \le -1$, то $6p + 3 \le x \le p - 2$; если $p > -1$, то решений нет.

Неравенство ($*$) относительно любого из двух модулей имеет вид $|f| \le g$. Поэтому при любом раскрытии модуля (четыре комбинации знаков подмодульных выражений: (+ +), (+ –), (– +) и (– –)) все получаемые неравенства согласно первому правилу надо рассматривать одновременно, то есть в системе. Этим и объясняется первый равносильный переход, остальное очевидно.

Аналогично решается неравенство следующей задачи.

Задача 2. *Решите неравенство*

$$|3x + 2| + |2x - 3| < 11\ .$$

Решение. Относительно любого модуля данное неравенство имеет вид $|f| < g$. Поэтому перебрав все четыре комбинации знаков двух подмодульных выражений, имеем

$$|3x + 2| + |2x - 3| < 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2) + (2x-3) < 11, \\ (3x+2) - (2x-3) < 11, \\ -(3x+2) + (2x-3) < 11, \\ -(3x+2) - (2x-3) < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2{,}4, \\ x < 6, \\ x > -16, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \max\{-16, -2\} < x < \max\left\{6, \frac{12}{5}\right\} \Leftrightarrow -2 < x < 2{,}4\ .$$

Ответ: (–2; 2,4).

Естественно, читатель заметит, что эту задачу можно решить и методом интервалов, и исходя из геометрического смысла модуля и т.д. Но наша цель – указать на *простоту* переходов к системам или совокупностям, играя знаками подмодульных выражений. Тем более, что в задачах с параметрами эта техника обеспечивает явные преимущества (см. задачу 1).

Еще один пример.

Задача 3. *Для любого значения параметра p решите неравенство*

$$|2x+21p|-2\cdot|2x-21p|<x-21p\ .\ (**)$$

Решение. Относительно первого модуля неравенство имеет вид $|f|<g$, а относительно второго $|f|>g$. Поэтому, раскрывая первый модуль, перейдем к системе, а второй – к совокупности. Начинать можно с любого.

Первый вариант освобождения от модулей:

$$|2x+21p|-2\cdot|2x-21p|<x-21p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|2x+21p|-2(2x-21p)<x-21p\\|2x+21p|+2(2x-21p)<x-21p\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2x+21p)-2(2x-21p)<x-21p,\\-(2x+21p)-2(2x-21p)<x-21p\end{cases}\\ \begin{cases}(2x+21p)+2(2x-21p)<x-21p,\\-(2x+21p)+2(2x-21p)<x-21p\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>28p,\\x>6p\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x<0,\\x<42p.\end{cases}$$

Иными словами,

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases}x>28p,\\x>6p\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x<0,\\x<42p.\end{cases}$$

Второй вариант освобождения от модулей:

$$|2x+21p|-2\cdot|2x-21p|<x-21p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+21p)-2|2x-21p|<x-21p,\\-(2x+21p)-2|2x-21p|<x-21p,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}(2x+21p)-2(2x-21p)<x-21p\\(2x+21p)+2(2x-21p)<x-21p,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-(2x+21p)-2(2x-21p)<x-21p\\-(2x+21p)+2(2x-21p)<x-21p,\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>28p\\x<0,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>6p\\x<42p.\end{array}\right.\end{cases}$$

Иными словами,

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases}x<0\ ,л,\quad x>28\ p\\x<42p\ ,л,\quad x>6\ p\end{cases}$$

Дальнейшие действия определяются знаком параметра p, так как только от него зависит расположение на числовой оси точек $x=0$, $x=6p$, $x=28p$, $x=42p$:

если $p<0$, то $42p<28p<6p<0$;

если $p=0$, то $0=6p=28p=42p$;

если $p>0$, то $0<6p<28p<42p$.

Поэтому быстро устанавливаем, что

если $p<0$, то $x\in(-\infty;42p)\cup(6p;\infty)$;

если $p=0$, то $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

если $p>0$, то $x\in(-\infty;0)\cup(28p;+\infty)$.

Это и есть ответ неравенства $(**)$.

Удобно или нет?

Все приведенные решения вызывают естественный вопрос, насколько громоздкой будет работа при наличии в неравенстве трех и более модулей по отношению к другим способам решений.

Вернемся к задаче 1 и решим ее стандартным методом – методом интервалов.

Определяем значения x, при которых обращаются в ноль подмодульные выражения неравенства $(*)$: $x_1=p$ и $x_2=3p$. Далее мы обязаны разобраться со взаимным расположением x_1 и x_2 на числовой оси. Вынуждены рассматривать три случая:

1) $x_1<x_2 \Leftrightarrow p>0$,
2) $x_1=x_2 \Leftrightarrow p=0$,
3) $x_2<x_1 \Leftrightarrow p<0$.

Для случая 1 числовая ось переменной x разбивается на три промежутка знакопостоянства подмодульных выражений $x-p$ и $x-3p$:

$$x\le x_1=p\ ,\ \ x_1<x\le x_2=3p \ \text{ и } \ x>x_2\,.$$

Поэтому исходное неравенство $(*)$ при $p>0$ равносильно следующей совокупности трех систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le p,\\-3(x-p)-5(x-3p)+4x+6p+12\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}p<x\le 3p,\\3(x-p)-5(x-3p)+4x+6p+12\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>3p,\\3(x-p)+5(x-3p)+4x+6p+12\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Очевидно, вы узнали неравенства (10.4), (10.2), (10.1), которые приходится решать теперь при $p>0$ на соответствующих промежутках.

Полученная совокупность после упрощений принимает вид ($p>0$!)

$$\left[\begin{array}{l}6p+3\le x\le p\\ \begin{cases}p<x\le 3p,\\x\le -9p-6\end{cases}\\ 3p<x\le p-1.\end{array}\right. \qquad (11)$$

Упражнение 9. Для всех положительных значений параметра p найдите множество решений совокупности (11).

Для случая 2 ($x_1=x_2=p=0$) мы получаем неравенство $8|x|+4x+12\le 0$, которое обязаны решить отдельно на промежутках $x\le 0$ и $x>0$ (проделайте самостоятельно). Заметим, что при этом мы будем рассматривать частные случаи неравенств (10.4) и (10.1) соответственно.

Аналогично случаю 1, для случая 3 ($p<0$ и $x_2<x_1$) мы получаем такую совокупность трех систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le x_2=3p,\\-3(x-p)-5(x-3p)+4x+6p+12\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}3p<x\le x_1=p,\\-3(x-p)+5(x-3p)+4x+6p+12\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>x_1=p,\\3(x-p)+5(x-3p)+4x+6p+12\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Эта совокупность после упрощений принимает вид

$$\left[\begin{array}{l}6p+3\le x\le 3p\\ \begin{cases}3p<x\le p,\\x\le p-2\end{cases}\\ p<x\le p-1.\end{array}\right. \qquad (12)$$

Совокупность (12) мы должны решать для всех $p < 0$. Наверняка большинство читателей испытают при этом серьезные трудности.

Упражнение 10. Для всех отрицательных значений параметра p найдите множество решений совокупности (12).

Объединяя ответы всех трех случаев, получим ответ задачи.

Легко видеть, что решение задачи 1 методом интервалов по эффективности существенно уступает первоначальному решению.

Рискнем утверждать, что в неравенствах с параметром первоначальное решение всегда более эффективно, чем любое другое.

Разберем теперь ситуацию, когда подмодульные выражения в неравенствах не содержат параметр.

Задача 4. *Решите неравенство*

$$|x+6-|3x+6||+|x+2|-x-4 \le 0 . \qquad (13)$$

Решение. Если не увидеть, что $|3x+6| = 3|x+2|$ и относительно $|3x+6|$ неравенство не является основным (т.е. не $|f| \vee g$), то формальное освобождение от модулей по предлагаемой технологии приведет к системе, в которую войдут две совокупности по два неравенства в каждой и еще четыре неравенства.

Однако, реагируя на взаимосвязь $|3x+6|$ и $|x+2|$, можно быстро получить ответ:

$$(13) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6-3|x+2|)+|x+2|-x-4 \le 0, \\ -(x+6-3|x+2|)+|x+2|-x-4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| \ge 1, \\ 2|x+2|-x-5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \ \text{,л,} \ \ x \ge 4, \\ 2(x+2)-x-5 \le 0, \\ -2(x+2)-x-5 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \text{ или } x \ge -1, \\ x \le 1, \\ x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ -1 \le x \le 1. \end{array} \right.$$

Ответ: $x = -3$ или $-1 \le x \le 1$.

Приведенное решение неравенства (13) явно быстрее дает ответ, чем решение методом интервалов. В этом вы можете убедиться самостоятельно.

Упражнение 11 (не простое!). В чем заключается ошибочность преобразования

$$|f_1+2|f_2||+|f_2|+f_3 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1+2f_2)+f_2+f_3 \le 0, \\ (f_1-2f_2)-f_2+f_3 \le 0, \\ -(f_1+2f_2)+f_2+f_3 \le 0, \\ -(f_1-2f_2)-f_2+f_3 \le 0 \end{cases}$$

(мы соблазнились объявлять один и тот же знак f_2 в обоих присутствующих $|f_2|$)?

Упражнение 11 предупреждает читателя, что «играть знаками» подмодульных выражений можно только(!) для модулей, относительно которых данное неравенство является *основным* (см. таблицу).

Примеры

В заключение приведем решения еще нескольких задач из вступительных экзаменов.

Задача 5. *При каких значениях параметра а неравенство*

$$x^2-|x-a|-|x-1|+3 \ge 0 \qquad (14)$$

выполняется при всех значениях х?

Решение. Относительно обоих модулей неравенство (14) имеет вид $|f| \le g$. Поэтому

$$(14) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(x-a)-(x-1)+3 \ge 0, \\ x^2-(x-a)+(x-1)+3 \ge 0, \\ x^2+(x-a)-(x-1)+3 \ge 0, \\ x^2+(x-a)+(x-1)+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+a+4 \ge 0, \\ x^2+a+2 \ge 0, \\ x^2-a+4 \ge 0, \\ x^2+2x-a+2 \ge 0. \end{cases}$$

Выполнение для всех x неравенства (14) равносильно выполнению для всех x всех неравенств последней системы. А это равносильно тому, что дискриминанты *всех* четырех квадратных трехчленов неположительны:

$$\begin{cases} D_1 \le 0, \\ D_2 \le 0, \\ D_3 \le 0, \\ D_4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2-4(a+4) \le 0, \\ -4(a+2) \le 0, \\ -4(-a+4) \le 0, \\ 2^2-4(-a+2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le a \le 1.$$

Ответ: $-2 \le a \le 1$.

Задача 6. *Найдите все значения параметра а, для которых наименьшее значение функции*

$$y = x^2+|x-a|+|x-1|$$

больше 2.

Решение. Задача равносильна тому, что для всех x выполняется неравенство

$$x^2+|x-a|+|x-1| > 2 . \qquad (15)$$

Относительно обоих модулей это неравенство имеет вид $|f| > g$. Поэтому, согласно таблице, при замене модулей на плюс-минус подмодульные выражения ((+ +), (+ −), (− +), (− −)) получаемые четыре неравенства в совокупности будут равносильны неравенству (15).

С целью повторения проделаем это более подробно. Раскрывать модули начинаем со второго:

$$(15) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+|x-a|+(x-1) > 2 \\ x^2+|x-a|-(x-1) > 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2+(x-a)+(x-1) > 2 \\ x^2-(x-a)+(x-1) > 2 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x^2+(x-a)-(x-1) > 2 \\ x^2-(x-a)-(x-1) > 2 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-a-3 > 0 \\ x^2+a-3 > 0 \\ x^2-a-1 > 0 \\ x^2-2x+a-1 > 0. \end{array} \right.$$

Неравенство (15) должно выполняться для всех x. Это равносильно тому, что для всех x выполняется *хотя бы одно* квадратное неравенство последней совокупности, т.е. *хотя бы один* из четырех дискриминантов отрицательный:

$$\left[\begin{array}{l} D_1 < 0 \\ D_2 < 0 \\ D_3 < 0 \\ D_4 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^2-4(-a-3) < 0 \\ -4(a-3) < 0 \\ -4(-a-1) < 0 \\ (-2)^2-4(a-1) < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+4 < 0 \\ a-3 > 0 \\ a+1 < 0 \\ -a+2 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -1 \\ a > 2. \end{array} \right.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Задача 7. *Найдите все значения параметра р, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства*

$$4x^2-20(x-1)+3 \cdot |4x-p|-p \le 0 \qquad (16)$$

максимально.

(Продолжение см. на с. 50)

Как береза с горки скатилась

А.ДУБИНОВА

«ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ СКОЛЬЗИТ ТЕЛО...». ТАК начинаются многие школьные задачи по механике, в которых требуется найти конечную скорость (энергию) тела или рассчитать значение силы, действующей на тело. Очень часто в условии не сообщается, о каком именно теле идет речь, а говорится отвлеченно – движется брусок или груз. Лишь иногда в задаче обсуждается конкретное тело – например, санки с грузом. Все это, безусловно, наводит на решающего задачу (особенно школьника) немалую скуку. Другое дело, когда задача представляет собой не абстрактный набор данных, а живую картину какого-нибудь явления (или процесса). Тогда интересно не только ответить на поставленный в задаче вопрос, но и рассмотреть это явление со всех сторон, объяснить, почему оно происходит именно так, а не иначе.

Но где взять интересную задачу? Оказывается, далеко ходить не надо. Сама природа придумывает за нас такие необычные явления, что порой не веришь глазам своим. «Неужели такое возможно?» – невольно задаешь себе вопрос. А где искать ответ на него? Конечно же, в физических законах. И начинаешь измерять, подсчитывать, оценивать...

Весной прошлого года мне пришлось наблюдать результаты довольно любопытного явления. В городе Темникове (республика Мордовия) во время сильнейшего ливня с высокого обрыва в реку Мокша сползла береза, которая так и осталась стоять посреди воды в строго вертикальном положении.

Рис. 1

Автор этой статьи Анна Дубинова – ученица лицея 15 города Сарова Нижегородской области.

Посмотрите на фотографию на рисунке 1 – создается впечатление, будто дерево растет прямо из воды. Эта фотография была сделана несколько позже, в июле. За два месяца зеленый наряд березы слегка пожелтел, что свидетельствует о неправильном снабжении дерева водой.

Очень странно, что береза, так значительно удалившись от берега, не потеряла равновесия при своем движении. Эту-то странность и захотелось объяснить с помощью законов механики. Поэтому перейдем непосредственно к задаче.

Для начала оценим характерные размеры березы и берега. По фотографии на рисунке 2, сделанной с противоположного берега, можно оценить высоту надводной части березы, сравнив ее,например, с высотой окна дома. Так как высота окна $h_о \approx 1$ м, то получаем, что высота надводной части березы $h_н \approx 10$ м. Из этого же рисунка можно определить высоту берега: $H \approx 9$ м, а из рисунке 1 – удаленность места начального положения березы от кромки воды по горизонтали: $L \approx 9$ м. Таким образом, средний угол «наклонной плоскости», по которой сползала береза, равен $\alpha = \operatorname{arctg}(H/L) \approx 45°$. Зная высоту березы, можно оценить и ее расстояние от берега: $l \approx 5$ м.

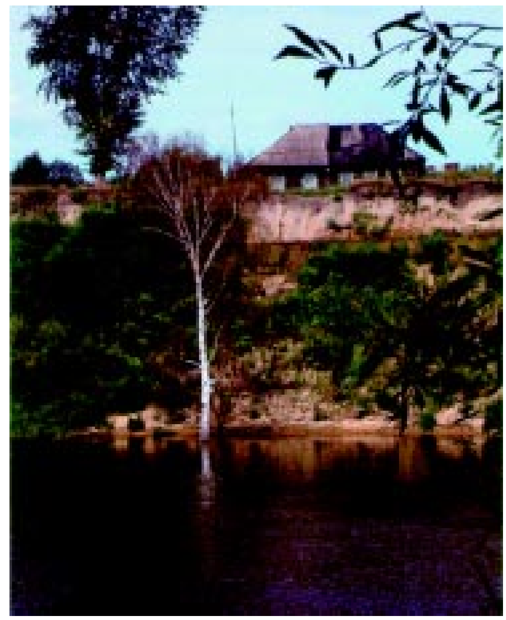


Рис. 2

Несколько труднее было определить высоту подводной части березы – для этого надо было дождаться теплой погоды, когда можно плавать без боязни простудиться (течение Мокши быстрое, берега изобилуют родниками, так что вода в реке прогревается плохо). Мой отец помог мне измерить высоту подводной части березы: $h_п \approx 1$ м и диаметр ствола у основания $d \approx 0,4$ м.

Итак, полная высота березы

$$h_б = h_н + h_п \approx 10 \text{ м} + 1 \text{ м} = 11 \text{ м}.$$

Интересно, что, согласно измерениям, рядом с березой глубина составляет приблизительно 1 м, хотя глубина реки на таком удалении от берега больше роста человека и равна примерно 2 м. Дело в том, что вместе с березой в реку скатился большой ком земли, удерживаемый корневой системой березы. Этот ком в народе называют выворотом. Высота выворота как раз и равна разности глубин до дна на некотором удалении от березы и вблизи нее: $h_в \approx 1$ м. Площадь выворота можно оценить по выемке, оставшейся на

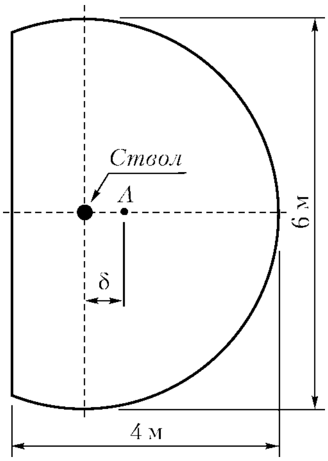


Рис. 3

месте роста березы. Форма выворота имеет вид кругового сегмента диаметром около 6 м (рис.3), причем хорда сегмента обращена в сторону движения.

Оценим массу березы и выворота. Примем для простоты, что береза представляет собой прямой круговой цилиндр диаметром 0,4 м и высотой 11 м, имеющий плотность 1000 $кг/м^3$. Здесь мы взяли завышенный диаметр верхней части ствола и завышенную плотность древесины, но таким образом учли наличие у березы кроны и листвы. Получим, что масса березы $m_б \approx 1,3$ т. Массу выворота оценим как произведение площади сегмента (см. рис.3) на высоту выворота и на плотность глины 2500 $кг/м^3$. В таком случае масса выворота $m_в \approx 50$ т. Значит, береза с выворотом перед началом спуска обладала запасом потенциальной энергии порядка 5,5 МДж. Это колоссальная энергия!

Перейдем теперь к обсуждению устойчивости движения березы по склону. Для этого определим высоту центра тяжести системы береза – выворот и положение проекции центра тяжести при движении по наклонной плоскости. Если проекция будет выходить за пределы сегмента, то береза опрокинется. Для упрощения примем, что масса выворота целиком сосредоточена в некоторой точке A на высоте 0,5 м, а масса березы – в точке B на высоте 6,5 м в центре березы (рис.4).

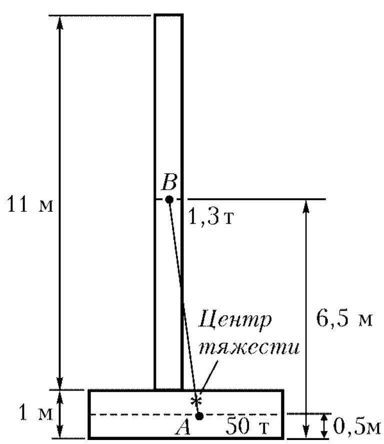


Рис. 4

Будем считать, что масса равномерно распределена в объеме выворота, и определим положение точки A в плоскости сегмента (см. рис.3).

Для нахождения удаления δ центра тяжести выворота от оси березы воспользуемся методом частичных областей. План решения задачи следующий. Мы знаем положение центра тяжести круга – центр самого круга. Далее найдем положение центра тяжести кругового сектора с углом раствора 2β. Вспомнив, что центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан и что медианы делятся в этой точке в отношении 2:1 (считая от вершины треугольника, из которого выходит медиана), можно определить положение центра тяжести кругового сегмента с углом раствора 2β, а затем – и с углом раствора $2\pi - 2\beta$. При этом если от исходной фигуры «отсекается» какая-либо часть, то ее масса и площадь (масса пропорциональна площади) при расчете положения центра тяжести считаются отрицательными. (Метод отрицательных масс давно применяется в теоретической механике для расчета положения центра масс сложных фигур и тел с разнообразными вырезами.)

Последовательность вычислений показана на рисунке 5, на котором отсекаемые фигуры закрашены.

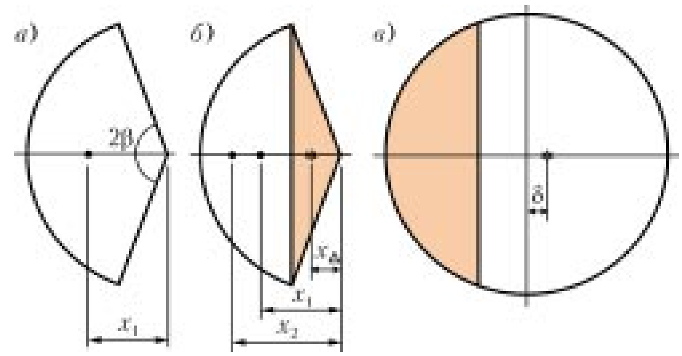


Рис. 5

Итак, расстояние от центра круга радиусом R до центра тяжести кругового сектора с углом раствора 2β и площадью S_1 (см. рис.5,*а*) равно

$$x_1 = \frac{2}{3}\frac{\sin\beta}{\beta}R,$$

где угол β в знаменателе выражен в радианах. В нашем случае $\beta = 1,23$ рад, и $x_1 = 1,53$ м. Используя свойства медиан, получаем $x_\Delta = 0,67$ м. Найдем теперь положение центра тяжести сегмента, изображенного на рисунке 5,*б*. Так как площадь S_Δ треугольника отрицательна, то

$$x_2 = \frac{S_1x_1 - S_\Delta x_\Delta}{S_1 - S_\Delta} \approx 1,82 \text{ м}.$$

Рассчитаем далее положение центра тяжести сегмента с углом раствора $2\pi - 2\beta$ (см. рис.5,*в*). Получаем

$$\delta = \frac{S_2x_2}{S_0 - S_2} = 0,75 \text{ м},$$

где S_2 – площадь сегмента с углом раствора 2β, а S_0 – площадь круга. Заметим, что положение центра тяжести выворота находится по другую сторону от центра круга, чем центры тяжести промежуточных фигур.

Несложный расчет положения центра тяжести системы береза – выворот показал, что высота центра тяжести системы составляет всего 19 см над уровнем центра тяжести выворота и находится глубоко в его объеме, а его проекция на наклонную плоскость с углом $\alpha = 45°$ находится далеко от края сегмента внутри его, что доказывает его устойчивость. Так же нетрудно оценить, что береза будет устойчиво скатываться с горы без опрокидывания даже при уклоне горы величиной $\operatorname{arctg}(1,75/0,69) \approx 68°$. Это говорит о том, что скатывание березы устойчиво даже при сильно неровном склоне обрыва.

Таким образом, мы определили, что на устойчивость спуска березы сильное влияние оказало наличие тяжелого выворота, который в настоящее время скрыт водой. Однако след от него – выемка – осталась на месте прежнего роста березы, правда она уже заросла травой.

Какова дальнейшая судьба березы-путешественницы? Увы, она погибла от избытка воды. Уже в июле ее листва пожелтела и была не такой густой, как раньше. В сентябре наша береза совсем лишилась листьев, тогда когда другие березы на берегу радовали глаз веселым золотым нарядом. Зимой она стояла посреди ледяной равнины, и ее окрестность облюбовали поклонники зимней рыбалки. А весной мощный ледоход и паводок опрокинули нашу березу и унесли ее вниз по течению.

Катушки индуктивности в электрических цепях

В.МОЖАЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ БУДУТ РАССМОТРЕНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ цепи, обладающие относительно большой индуктивностью. Как правило, катушка индуктивности представляет собой достаточно большое количество витков изолированного провода, намотанного на цилиндрический или тороидальный каркас, причем для увеличения индуктивности каркасы заменяют магнитными сердечниками в виде цилиндров или торов. Разумеется, такие катушки обладают не только индуктивностью, но и емкостью (межвитковой) и омическим сопротивлением (обмотки). В задачах же обычно разбираются идеализированные схемы, в которых катушки индуктивности обладают только чистой индуктивностью.

Катушки индуктивности используются в основном для двух целей: для получения сильных (с большой величиной индукции магнитного поля) магнитных полей (электромагниты) и для создания электрической колебательной системы, т.е. колебательного контура. Если конденсатор позволяет аккумулировать энергию электрического поля, то катушка индуктивности накапливает энергию магнитного поля. При колебаниях энергия контура переходит из электрической в магнитную и обратно.

Перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. *Какое количество теплоты выделится в схеме (рис.1) после размыкания ключа K? Все параметры элементов схемы считать известными.*

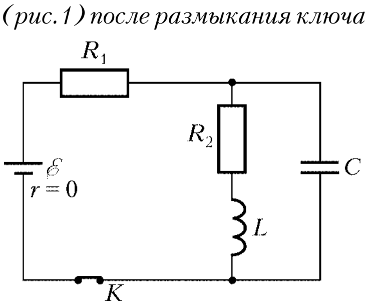


Рис. 1

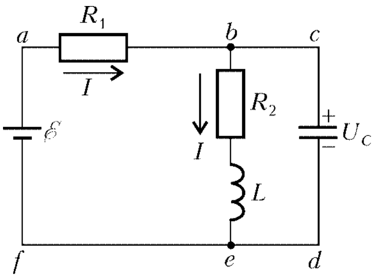


Рис. 2

Перед размыканием ключа K в схеме имеет место установившееся стационарное состояние, в контуре *abefa* (рис.2) течет постоянный ток. Величину этого тока найдем по закону Ома для контура:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

Ток через конденсатор равен нулю, а постоянное напряжение U_C на конденсаторе, согласно закону Ома для контура *bcdeb*, равно

$$U_C = IR_2 = \frac{R_2\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

Сразу после размыкания ключа в части контура *bcdeb* сохранится найденный ранее ток I, а на конденсаторе по-прежнему будет напряжение U_C. Затем в этом контуре возникнут затухающие колебания тока, и со временем они прекратятся. Весь изначальный запас энергии, сосредоточенный в катушке и в конденсаторе, выделится в резисторе сопротивлением R_2 в виде тепла, поэтому искомое количество теплоты будет равно

$$Q = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU_C^2}{2} = \frac{\left(L + CR_2^2\right)\mathcal{E}^2}{2\left(R_1 + R_2\right)^2}.$$

Задача 2. *В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ K на некоторое время замыкают, а потом снова размыкают. Определите время, на которое был замкнут ключ, если после его размыкания максимальное напряжение на конденсаторе было равно* $2\mathcal{E}$. *Считать заданными L и C. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.*

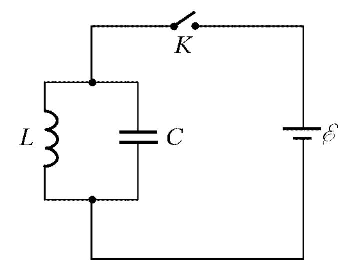


Рис. 3

Сразу после замыкания ключа конденсатор емкостью C моментально зарядится до напряжения, равного ЭДС батареи $\mathcal{E}$, и это напряжение на конденсаторе будет оставаться неизменным, пока ключ K будет замкнут. Очевидно, что начальный ток через катушку индуктивности был равен нулю. Закон Ома для замкнутого контура, охватывающего батарею и катушку, можно записать в виде

$$\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt},$$

где I – ток через катушку. Умножим обе части этого уравнения на dt и проинтегрируем:

$$\mathcal{E}\int_0^t dt = L\int_0^I dI.$$

После интегрирования получим такую зависимость тока от времени:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{L}t.$$

Если мы разомкнем ключ через время τ, то ток через катушку сразу после размыкания будет равен

$$I(\tau) = \frac{\mathcal{E}}{L}\tau,$$

а напряжение на конденсаторе по-прежнему будет равно $\mathcal{E}$. После размыкания ключа в LC-контуре начнутся гармонические колебания тока при сохранении энергии, запасенной в контуре в момент размыкания ключа. Полная энергия в контуре после размыкания ключа равна

$$W = \frac{LI^2(\tau)}{2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

В момент, когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения, ток в контуре равен нулю, и вся энергия контура сосредоточена в конденсаторе, напряжение на котором удвоится:

$$W = \frac{C(2\mathcal{E})^2}{2} = 2C\mathcal{E}^2.$$

Приравнивая обе энергии, получим

$$\frac{\mathcal{E}^2\tau^2}{2L} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = 2C\mathcal{E}^2,$$

откуда

$$\tau = \sqrt{3LC}\ .$$

Задача 3. *Конденсатор емкостью C, заряженный до разности потенциалов U_0, через ключ K подключен к двум катушкам с индуктивностями L_1 и L_2 (рис.4). Если замкнуть ключ, то через некоторое время конденсатор полностью перезарядится (напряжение на конденсаторе поменяет знак). Какие заряды протекут через катушки за это время?*

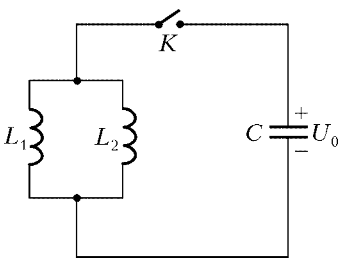


Рис. 4

Покажем, что после замыкания ключа в образовавшемся колебательном контуре происходят гармонические колебания токов в катушках и что, самое главное, колебания токов в катушках происходят синфазно, но с разными амплитудами.

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. Пусть в этот момент в цепи текут токи, изображенные на рисунке 5, а напряжение на конденсаторе равно U. По закону сохранения заряда,

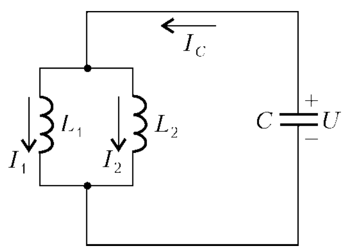


Рис. 5

$$I_C = I_1 + I_2\ . \qquad (1)$$

Запишем закон Ома для контура, содержащего конденсатор и катушку индуктивностью L_1:

$$L_1\frac{dI_1}{dt} = U\ , \qquad (2)$$

и для контура, охватывающего катушки с индуктивностями L_1 и L_2:

$$L_1\frac{dI_1}{dt} = L_2\frac{dI_2}{dt}\ . \qquad (3)$$

Связь между током I_C и напряжением на конденсаторе U имеет вид

$$I_C = -C\frac{dU}{dt}\ . \qquad (4)$$

Продифференцируем уравнение (2) по времени:

$$L_1I_1'' - U' = 0\ .$$

Подставив сюда U' из уравнения (4) и I_C из равенства (1), получим

$$L_1I_1'' + \frac{1}{C}\left(I_1 + I_2\right) = 0\ . \qquad (5)$$

Теперь перепишем уравнение (3) несколько иначе:

$$\frac{d}{dt}\left(L_1I_1 - L_2I_2\right) = 0\ .$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$L_1I_1 - L_2I_2 = \text{const}\ .$$

Поскольку начальные токи в катушках равны нулю, константа также равна нулю, и мы получаем связь между токами I_1 и I_2:

$$L_1I_1 = L_2I_2\ . \qquad (6)$$

Выражая отсюда I_2 и подставляя в (5), получим уравнение относительно I_1:

$$I_1'' + \frac{\left(L_1 + L_2\right)}{CL_1L_2}I_1 = 0\ .$$

Это уравнение описывает гармонические колебания тока I_1 с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{CL_1L_2}}\ .$$

Поскольку токи I_1 и I_2 в любой момент времени связаны соотношением (6), оба тока изменяются по одному и тому же гармоническому закону, но с разными амплитудами. Очевидно, что суммарный заряд, который протечет через обе катушки, равен

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2CU_0\ .$$

Отношение заряда, протекающего через катушку индуктивностью L_1, к заряду, протекшему через катушку индуктивностью L_2, равно

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{L_1}\ .$$

Следовательно,

$$Q_1 = \frac{2CU_0L_2}{L_1 + L_2}\ ,\quad Q_2 = \frac{2CU_0L_1}{L_1 + L_2}\ .$$

Задача 4. *В схеме (рис.6) конденсатор емкостью C заряжен до некоторого напряжения. После замыкания ключа K в цепи происходят свободные колебания тока, при которых амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_0. Когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения, из нее быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний) выдвигают сердечник, что приводит к уменьшению ее индуктивности в μ раз. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе после выдвижения сердечника.*

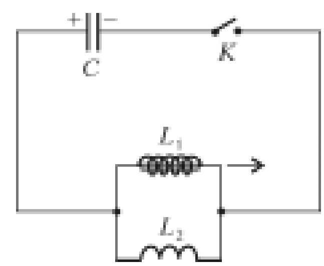


Рис. 6

Как следует из решения задачи 3, в тот момент, когда ток через катушку индуктивностью L_2 достигает максимального значения I_0, ток через катушку индуктивностью L_1 также принимает максимальное значение, равное

$$I_{\max} = \frac{L_2I_0}{L_1}\ .$$

При быстром изменении индуктивности первой катушки от L_1 до L_1/μ сохраняются магнитные потоки, пронизывающие каждую катушку. В катушке индуктивностью L_2 ток останется равным I_0. Обозначим новый ток в первой катушке через I_1. Тогда по закону сохранения магнитного потока можно записать

$$L_1I_{\max} = \frac{L_1}{\mu}I_1\ ,$$

откуда

$$I_1 = \mu I_{\max} = \frac{\mu L_2}{L_1}I_0\ .$$

При максимальном напряжении на конденсаторе токи в катушках равны нулю. По закону сохранения энергии,

$$\frac{L_1I_1^2}{2\mu} + \frac{L_2I_0^2}{2} = \frac{CU_{\max}^2}{2}\ .$$

Отсюда находим искомое максимальное напряжение конденсатора:

$$U_{\max} = I_0\sqrt{\frac{L_2\left(\mu L_2 + L_1\right)}{CL_1}}\ .$$

Задача 5. *В схеме, изображенной на рисунке 7, две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены последовательно с конденсатором емкостью C. В начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор заряжен до напряжения U_0. Сначала замыкают ключ K_1, а потом, после того как напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2. Через некоторое время после замыкания ключа K_2 конденсатор перезарядится до некоторого максимального напряжения. Определите величину этого напряжения.*

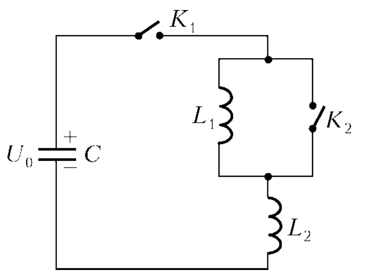


Рис. 7

После замыкания ключа K_1 конденсатор начнет разряжаться, и в контуре по синусоидальному закону будет нарастать ток. Через четверть периода, т.е. через промежуток времени, равный $\frac{\pi}{2}\sqrt{(L_1+L_2)C}$, напряжение на конденсаторе станет равным нулю, а ток в контуре достигнет максимального значения I_{max}. Величину этого тока найдем по закону сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{(L_1+L_2)I_{max}^2}{2},$$

откуда

$$I_{max} = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}.$$

В этот момент замыкают ключ K_2. Закон Ома для контура, содержащего катушку индуктивностью L_1 и замкнутый ключ K_2, позволяет записать

$$L_1\frac{dI_1}{dt} = 0,$$

где I_1 – ток через катушку после замыкания ключа. Уравнение для тока I_1 означает, что ток через катушку индуктивностью L_1 после замыкания ключа K_2 будет оставаться постоянным и равным I_{max}, т.е.

$$I_1 = I_{max} = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}.$$

Ток через катушку индуктивностью L_2 будет уменьшаться по гармоническому закону, но уже с частотой $\omega = 1/\sqrt{L_2C}$. Напряжение на конденсаторе будет расти, и когда оно достигнет максимального значения U_{max}, ток через катушку индуктивностью L_2 будет равен нулю. Это напряжение можно найти по закону сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1I_1^2}{2} + \frac{CU_{max}^2}{2} = \frac{CL_1U_0^2}{2(L_1+L_2)} + \frac{CU_{max}^2}{2},$$

откуда

$$U_{max} = U_0\sqrt{\frac{L_2}{L_1+L_2}}.$$

Задача 6. *В схеме на рисунке 8 катушки с индуктивностями L_1 и L_2 закорочены через идеальный диод D. В начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0. Найдите зависимости токов через катушки от времени после замыкания ключа K и изобразите эти зависимости на графике $I(t)$.*

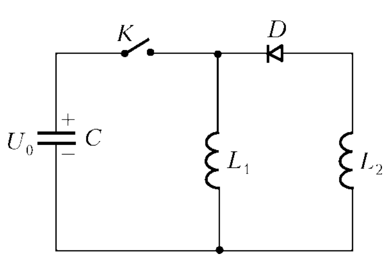


Рис. 8

Сразу после замыкания ключа диод будет находиться в запертом состоянии. Поэтому можно считать, что вторая катушка отключена от цепи, а рабочая схема имеет вид, изображенный на рисунке 9. Пусть в произвольный момент времени через катушку индуктивностью L_1 течет ток I_1, а напряжение на конденсаторе равно U. Закон Ома для этой цепи имеет вид

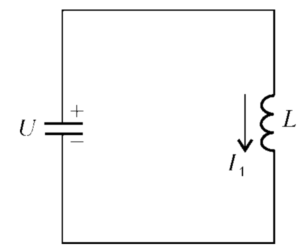


Рис. 9

$$L_1\frac{dI_1}{dt} = U.$$

Условие сохранения заряда позволяет записать

$$I_1 = -\frac{dQ_C}{dt} = -C\frac{dU}{dt}.$$

Продифференцируем обе части первого уравнения по времени:

$$L_1\frac{d^2I_1}{dt^2} = \frac{dU}{dt}.$$

Подставив сюда производную $\frac{dU}{dt}$ из второго уравнения, получим уравнение для тока I_1:

$$I_1'' + \frac{1}{L_1C}I_1 = 0.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания тока I_1 с частотой $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C}}$. Решение этого уравнения будем искать в виде

$$I_1 = A\cos\omega_1t + B\sin\omega_1t,$$

где A и B – константы, которые найдем из начальных условий. Сразу после замыкания ключа ($t = 0$) $I_1 = 0$, откуда получаем $A = 0$. Константу B проще всего найти, используя закон сохранения энергии. При максимальном токе I_1 ($I_{1max} = B$) напряжение на конденсаторе равно нулю, поэтому

$$\frac{L_1B^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2},$$

откуда

$$B = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}.$$

Тогда зависимость $I_1(t)$ будет иметь вид

$$I_1 = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\sin\omega_1t.$$

Ток через катушку индуктивностью L_2, очевидно, будет равен нулю до тех пор, пока ток I_1 не достигнет максимума, а напряжение на конденсаторе не станет равным нулю. Это будет происходить в течение четверти периода, т.е. промежутка времени $0 \le t \le \frac{\pi}{2}\sqrt{L_1C}$ (здесь $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{L_1C}$ – период колебаний). Как только напряжение на конденсаторе начнет расти, но уже с другим знаком, откроется диод, и через катушку индуктивностью L_2 потечет ток. Рабочая схема будет иметь вид, изображенный на рисунке 10. Начало отсчета времени свяжем с моментом достижения максимального тока через первую катушку.

Пусть в произвольный момент времени токи через катушки равны I_1 и I_2, через конденсатор течет ток I_3, а напряжение

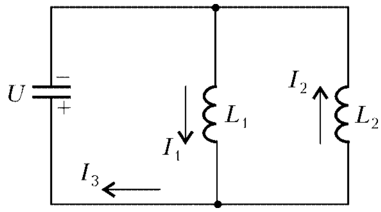


Рис. 10

на конденсаторе равно U. Запишем закон Ома для контура, охватывающего две катушки:

$$L_1\frac{dI_1}{dt}+L_2\frac{dI_2}{dt}=0\ .$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$L_1I_1+L_2I_2=\text{const}\ .$$

Поскольку в выбранный начальный момент $I_1(0)=U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}$, а $I_2(0)=0$, то

$$L_1I_1+L_2I_2=U_0\sqrt{L_1C}\ .$$

Теперь запишем закон Ома для контура, охватывающего конденсатор и катушку индуктивностью L_1:

$$-L_1\frac{dI_1}{dt}=U\ .$$

По закону сохранения заряда можно записать

$$I_1=I_2+I_3\,,\quad I_3=C\frac{dU}{dt}\ .$$

Из системы последних четырех уравнений взаимоисключением получим одно уравнение относительно тока I_1:

$$I_1''+\frac{L_1+L_2}{CL_1L_2}I_1=\frac{U_0}{L_2\sqrt{L_1C}}\ .$$

Это неоднородное уравнение также описывает гармонические колебания тока I_1, но уже с новой частотой $\omega_2=\sqrt{\frac{L_1+L_2}{CL_1L_2}}$. Наличие справа в уравнении не нулевого члена, а некоторой константы (не зависящей от времени) означает, что гармонические колебания тока будут происходить относительно не нулевого уровня, а некоторого значения тока $I_1=\text{const}=\frac{U_0\sqrt{L_1C}}{L_1+L_2}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$I_1=A\cos\omega_2t+B\sin\omega_2t+\frac{U_0\sqrt{L_1C}}{L_1+L_2}\ .$$

Поскольку при $t=0$ $I_1(0)=U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}$, то

$$A=U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}-U_0\frac{\sqrt{L_1C}}{L_1+L_2}\ .$$

Из начального условия $\frac{dI_1}{dt}=0$ (начало отсчета выбрано при максимальном токе) следует, что $B=0$.

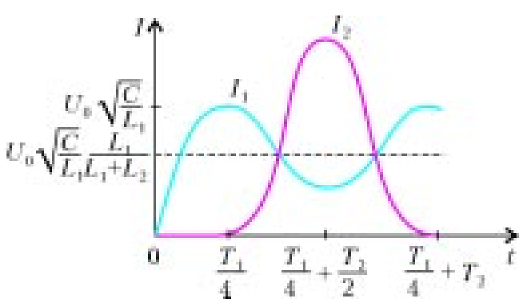


Рис. 11

Окончательная зависимость $I_1(t)$ будет имеет вид

$$I_1=U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\frac{L_2}{L_1+L_2}\cos\omega_2t+U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\frac{L_1}{L_1+L_2}\,,$$

а зависимость $I_2(t)$ –

$$I_2=U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(1-\cos\omega_2t\right).$$

Напомним, что в полученных зависимостях $I_1(t)$ и $I_2(t)$ время отсчитывается от момента $t=T_1/4$ после замыкания ключа. Полная (с момента замыкания ключа) временна́я зависимость токов I_1 и I_2 изображена на рисунке 11.

Упражнения

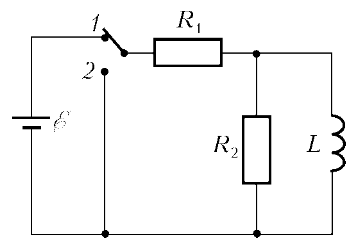


Рис. 12

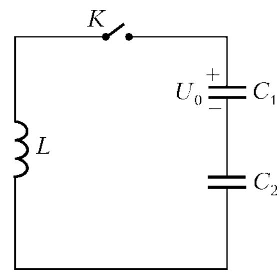


Рис. 13

1. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R_2 в схеме, изображенной на рисунке 12, после переключения ключа из положения *1* в положение *2*?

2. Цепь, состоящая из двух конденсаторов емкостями C_1 и C_2 и катушки индуктивностью L (рис.13), первоначально разомкнута. Конденсатор емкостью C_1 заряжен до разности потенциалов U_0. Определите максимальную величину силы тока в контуре после замыкания ключа.

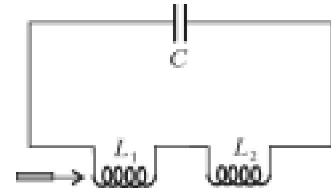


Рис. 14

3. В колебательном контуре, состоящем из двух последовательно соединенных катушек индуктивностями L_1 и L_2 и конденсатора емкостью C (рис.14), происходят свободные колебания тока, при которых амплитуда колебаний тока равна I_0. Когда сила тока в катушке индуктивностью L_1 становится максимальной, в нее быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний тока) вставляют сердечник, что приводит к увеличению индуктивности катушки в μ раз. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после введения сердечника.

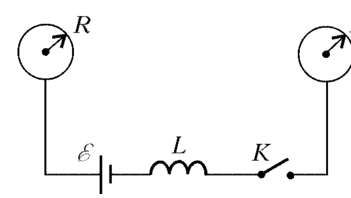


Рис. 15

4. Два удаленных проводящих шара радиусом R каждый соединены участком цепи, содержащим источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}$, катушку индуктивностью L и ключ K (рис.15). В начальный момент ключ разомкнут, а заряды на шарах отсутствуют. Определите максимальный заряд на каждом шаре после замыкания ключа. Омическим сопротивлением цепи пренебречь.

Точка внутри окружности

В.АЛЕКСЕЕВ, В.ГАЛКИН, В.ПАНФЕРОВ, В.ТАРАСОВ

Задачи о точках, находящихся внутри некоторой окружности, довольно часто встречаются в вариантах вступительных экзаменов. Мы поговорим о методах решения таких задач. Особое внимание при этом будет уделяться вспомогательным утверждениям, которые мы будем формулировать в виде так называемых опорных задач.

Концентрические окружности

Задача 1 (опорная). *Пусть прямая пересекает две концентрические окружности в точках M, N и M_1, N_1 соответственно (рис.1). Докажите что*

а) $MM_1 = N_1N$; *б)* $MM_1 \cdot M_1N = MP^2$,

где MP – отрезок касательной к меньшей окружности.

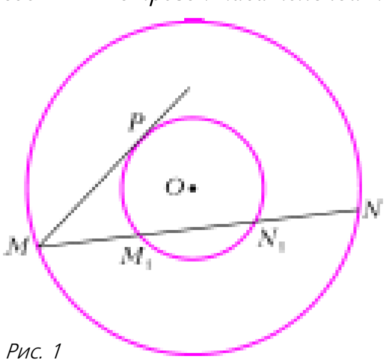


Рис. 1

Решение. а) Отрезки, о равенстве которых идет речь, симметричны относительно диаметра, перпендикулярного прямой MN. А значит, они равны.

б) По теореме об отрезках касательной (см. рис.1):

$$MP^2 = MM_1 \cdot MN_1 = MM_1 \cdot M_1N .$$

Задача 2 (географический факультет МГУ, 1997 г.). *Даны две концентрические окружности. В большей из них проведены две непересекающиеся хорды KL и MN, которые пересекают меньшую окружность в точках K_1, L_1 и M_1, N_1 соответственно (точки с индексом «1» расположены ближе к одноименным точкам без индекса). Хорды K_1N_1 и L_1M_1 меньшей окружности пересекаются в точке F. Найдите отношение площадей треугольников K_1FL_1 и M_1FN_1, если $KL = 5NN_1$, а длина хорды M_1N_1 равна среднему геометрическому длин отрезков KL и MM_1.*

Решение. Пусть $K_1L_1 = c$, $M_1N_1 = m$, $N_1N = M_1M = x$, $K_1K = L_1L = a$, $L_1L_2 = M_1M_2 = b$ (рис.2).

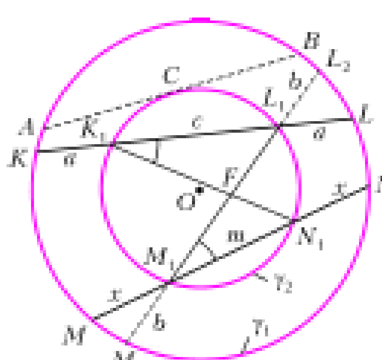


Рис. 2

Треугольники K_1FL_1 и M_1FN_1 подобны по двум углам ($\angle L_1K_1F = \angle N_1M_1F$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу L_1N_1). Поэтому искомое отношение площадей треугольников равно квадрату их коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\Delta K_1FL_1}}{S_{\Delta M_1FN_1}} = \left(\frac{K_1L_1}{M_1N_1}\right)^2 = \left(\frac{c}{m}\right)^2 .$$

По условию:

$$\begin{cases} KL = 5NN_1, \\ M_1N_1^2 = KL \cdot MM_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c = 5x, \\ m^2 = 5x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + c = m\sqrt{5}, \\ x = \dfrac{m}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Имеем:

$$LL_1 = a = \frac{m\sqrt{5} - c}{2} ,$$

$$KL_1 = a + c = \frac{m\sqrt{5} - c}{2} + c = \frac{m\sqrt{5} + c}{2} .$$

Так как, в силу задачи 1, $LL_1 \cdot KL_1 = MM_1 \cdot NM_1$, то

$$\frac{m\sqrt{5} - c}{2} \frac{m\sqrt{5} + c}{2} = \frac{m}{\sqrt{5}}\left(m + \frac{m}{\sqrt{5}}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{K_1L_1}{M_1N_1}\right)^2 = \frac{c^2}{m^2} = \frac{21 - 4\sqrt{5}}{5} .$$

Задача 3 (химический факультет МГУ, 1998 г.). *В окружности проведены хорды KL, MN, PS. Хорды KL и PS пересекаются в точке C, хорды KL и MN пересекаются в точке A, а хорды MN и PS пересекаются в точке B, причем $AL = CK$, $AM = BN$, $BS = 5$, $BC = 4$. Найдите радиус окружности, если величина угла BAC равна $\frac{\pi}{4}$.*

Решение. Пусть R – радиус исходной окружности, r – радиус окружности, проведенной через точки A, B и C (рис.3). Серединные перпендикуляры к отрезкам AC и KL совпадают, так как $AL = CK$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AB и MN тоже совпадают ($AM = BN$). Поэтому центры двух рассматриваемых окружностей совпадают (центр окружностей обозначим буквой O). Отсюда следует, что совпадают серединные перпендикуляры к отрезкам BC и PS, т.е. $PC = BS = 5$.

Так как $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, то

$$\angle BOC = 2\angle BAC = \frac{\pi}{2} \text{ и } \angle OBC = \angle OCB = \frac{\pi}{4} .$$

Пусть $OH \perp BC$. Тогда $OH = BH = CH = \frac{1}{2} BC = 2$. Из

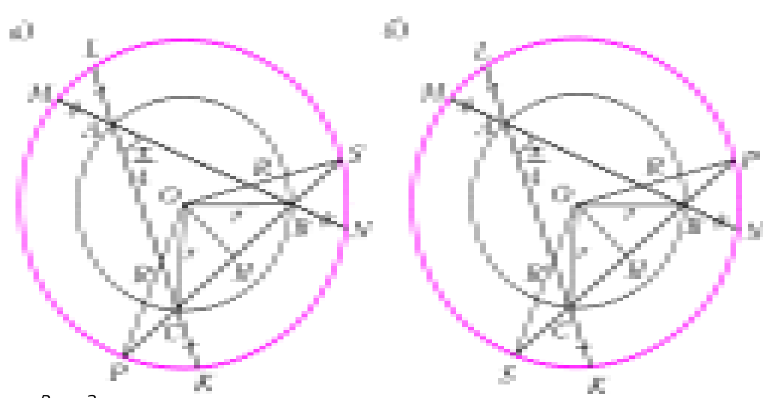


Рис. 3

треугольника OSH найдется искомый радиус:

$$R = \sqrt{OH^2 + \left(\frac{SP}{2}\right)^2}.$$

Возможны два случая:

1) Точка B лежит между точками C и S (см. рис.3,*а*). Тогда

$$SP = 2BS + BC = 14,\quad R = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}.$$

2) Точка C лежит между точками S и B (см. рис.3,*б*). Тогда

$$SP = 2BS - BC = 6,\quad R = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.\text{DD}$$

Итак, радиус окружности равен $\sqrt{53}$ или $\sqrt{13}$.

Замечание. Здесь важно рассмотреть оба случая.

Упражнение 1. В окружности радиуса $\sqrt{19}$ проведены хорды AB, CD, EF. Хорды AB и CD пересекаются в точке K, хорды CD и EF пересекаются в точке L, а хорды AB и EF пересекаются в точке M, причем $AM = BK$, $CK = DL$, $LF = 3$, $ML = 2$. Найдите величину угла CKB, если известно, что он тупой.

Пересекающиеся окружности

Задача 4 (опорная). *Из середины N хорды MM_1 окружности под одним и тем же углом к лучу NM проведены отрезки $CN = a$ и $DN = b$ (рис.4). Докажите, что длина половины хорды MM_1 есть среднее геометрическое длин отрезков CN и DN:*

$$MN = \sqrt{CN \cdot DN} = \sqrt{ab}.$$

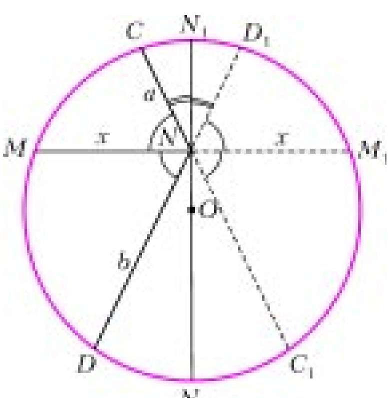


Рис. 4

Решение. Пусть $NM = = x$. Продлим отрезки DN и CN до пересечения с окружностью в точках D_1 и C_1 соответственно и проведем диаметр через точку N. Тогда $N_1N_2 \perp MM_1$, так как точка N – середина Из равенства $\angle MND = \angle MNC = \angle D_1NM_1 = \angle C_1NM_1$ получим, что $\angle CNN_1 = \angle D_1NN_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Значит, прямая N_1N_2 является осью симметрии, $CN = D_1N = a$ и по свойству отрезков хорд

$$MN \cdot M_1N = D_1N \cdot DN,\quad \text{или}\quad x^2 = ab,\quad x = \sqrt{ab}.$$

Задача 5 (физический факультет МГУ, 1978 г.). *Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D, а диаметр AB — в точке E. На дуге CE, не содержащей точку D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N. Известно, что $CN = a$, $DN = b$. Найдите MN.*

Решение. Так как AB диаметр (рис.5), то $AN \perp MN$, $MN = NM_1 = x$. Симметричные относительно линии центров AB дуги BmD и BnC равны, значит, $\angle BND = \angle BNC$. Таким образом, из точки N внутри второй окружности под одним и тем же углом к лучу NM исходят отрезки $CN = a$ и $ND = b$. В силу задачи 4,

$$MN = x = \sqrt{ab}.$$

Упражнение 2. В условиях задачи 5 найдите $\frac{CM}{MD}$, если $\frac{CN}{DN} = 2$.

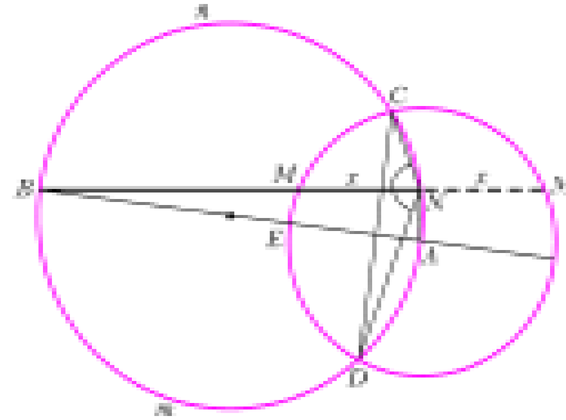


Рис. 5

Вписанные и описанные четырехугольники

Задача 6 (опорная). *В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность радиуса R, диагонали AC и BD перпендикулярны (рис.6). Докажите, что*

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = 4R^2.$$

Решение. Пусть $AB = a$, $CD = c$, а $\angle ACB = \alpha$ (см. рис.6). Тогда $\angle DBC = 90° - \alpha$ и по теореме синусов для ΔABC и ΔDBC получим

$$a = 2R\sin\alpha,\quad c = 2R\sin(90° - \alpha) = 2R\cos\alpha,$$

откуда

$$a^2 + c^2 = 4R^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 4R^2.$$

Замечание. Сравните со следующим свойством (и проверьте его): в произвольном выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями суммы квадратов длин противоположных сторон равны между собой.

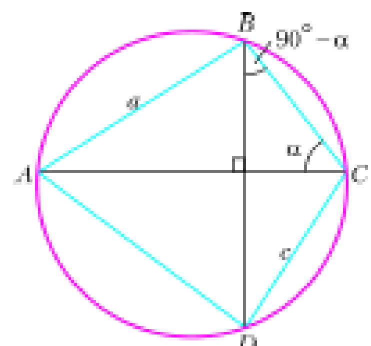


Рис. 6

Задача 7 (опорная). *Докажите, что в описанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями одна из диагоналей является осью симметрии, а значит, равны между собой симметричные ей соседние стороны.*

Решение. Пусть $AB = a$, $BC = x$, $CD = = u$, $AD = b$, $AK = v$, $KC = y$, $BK = z$, $KD = = t$ (рис.7). Без ограничения общности положим, что $a > x$.

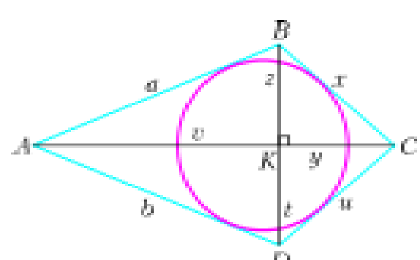


Рис. 7

Так как диагонали перпендикулярны, то $a^2 + u^2 = x^2 + b^2$ (в силу задачи 6). Поскольку в четырехугольник можно вписать окружность (по условию), то $a + + u = x + b$. Поэтому (при $a - x > 0$) имеем

$$\begin{cases} a^2 + u^2 = x^2 + b^2, \\ a + u = x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - x^2 = b^2 - u^2, \\ a - x = b - u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)(a+x)=(b-u)(b+u), \\ a-x=b-u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+x=b+u, \\ a-x=b-u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b, \\ x=u. \end{cases}$$

Итак, при $a > x$ прямая AC является осью симметрии, $AB = AD$, $BC = DC$. Четырехугольник $ABCD$ имеет форму дельтоида.

Задача 8 (факультет ВМК МГУ, 1979 г.). *В окружность вписан четырехугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Докажите, что EM – медиана треугольника CED, и найдите ее длину, если AD = 8, AB = 4 и* $\angle CDB = \alpha$.

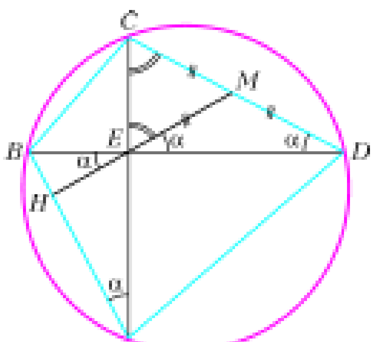


Рис. 8

Решение. Пусть H – точка пересечения прямых AB и EM (рис.8). Тогда $\angle BAC = \angle CDB = \alpha$. Кроме того, $\angle BEH = \angle MED = \alpha$. Значит, треугольник EMD равнобедренный с основанием DE, углами $\angle MDE = \angle MED = \alpha$ при основании и равными сторонами $EM = DM$. Треугольник MEC тоже равнобедренный с равными углами

$$\angle CEM = \angle ECM = \angle ECD = 90° - \alpha$$

и равными сторонами $EM = MC$. Таким образом, $EM = DM = MC$ и EM – медиана в треугольнике CED.

Из треугольников BAE, AED, CED последовательно находим

$$AE = AB\cos\angle CDB = 4\cos\alpha,$$

$$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{8^2 - (4\cos\alpha)^2} = 4\sqrt{4-\cos^2\alpha},$$

$$EM = \frac{1}{2}CD = \frac{ED}{2\cos\angle CDB} = \frac{4\sqrt{4-\cos^2\alpha}}{2\cos\alpha} = 2\sqrt{3+4\,\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Задача 9 (мехмат МГУ, 1971 г.). *В четырехугольник ABCD можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найдите площадь четырехугольника, если радиус описанной окружности равен R, и AB = 2BC.*

Решение. Пусть $BC = x$, $AB = y = 2x$ (по условию), $AD = z$, $CD = u$ (рис.9). Так как четырехугольник $ABCD$ описанный, то

$$BC + AD = AB + CD \Leftrightarrow x + z = 2x + u \Leftrightarrow z = x + u.$$

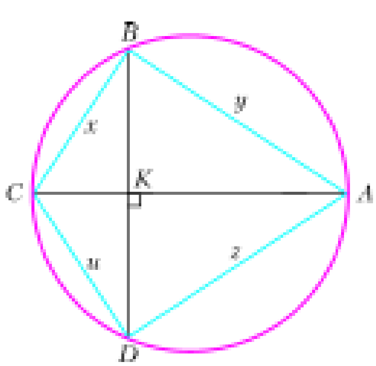


Рис. 9

Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный и его диагонали перпендикулярны, то, в силу результата задачи 6, сумма квадратов его противоположных сторон равна квадрату диаметра, т.е. $x^2 + z^2 = 4R^2$. Но из задачи 7 следует, что $u = x$, $z = y = 2x$, т.е. $5x^2 = 4R^2$. А так как $\angle CBA = \angle CDA = 90°$, получаем, что

$$S_{ABCD} = 2S_{CBA} = 2\cdot\frac{1}{2}xy = 2x^2 = \frac{8}{5}R^2.$$

Упражнения

3. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагональ AC делит площадь четырехугольника пополам. Найдите длину диагонали BD, если радиус вписанной окружности равен r, а периметр четырехугольника равен p.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R и описан около другой окружности, которая касается сторон четырехугольника в точках K, L, M, N. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что она в 3 раза больше площади четырехугольника $KLMN$, а угол между диагоналями AC и BD равен γ.

5. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие четырехугольник, который также можно вписать в окружность. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$, если его периметр равен p, а $MN = 2ML = 8LK$.

Задача 10 (факультет ВМК МГУ, 1998 г.). *В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K – точка пересечения его диагоналей. Известно, что AB > BC > KC,* $BK = 4+\sqrt{2}$, *а периметр и площадь треугольника BKC равны 14 и 7 соответственно. Найдите DC.*

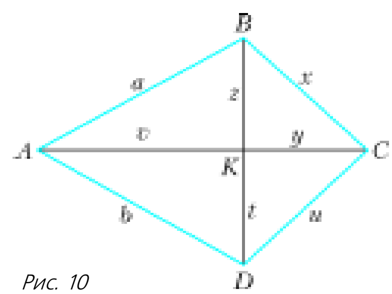


Рис. 10

Решение. Примем такие обозначения (рис. 10): $AB = a$, $AD = b$, $BK = z$, $KD = t$, $BC = x$, $KC = y$, $DC = u$, $AK = v$. В треугольнике BKC известны сторона z, периметр и площадь. Две другие стороны его x и y найдем из системы (формула Герона, известный периметр). А именно

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{14}{2}(7-x)(7-y)\left(7-4-\sqrt{2}\right)} = 7, \\ x+y = 14-\left(4+\sqrt{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 7(x+y) + xy = \dfrac{7}{3-\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2}, \\ x+y = 10-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 24-6\sqrt{2}, \\ y = 10-\sqrt{2}-x. \end{cases}$$

Отсюда

$$x^2 - \left(10-\sqrt{2}\right)x + 24 - 6\sqrt{2} = 0, \quad x = \frac{10-\sqrt{2}\pm\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}.$$

Учтем, что $\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2} = 2+\sqrt{2}$. Получим

$$\begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = 4-\sqrt{2} \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_2 = 4-\sqrt{2}, \\ y_2 = 6. \end{cases}$$

По условию, $x > y$. Поэтому $x = 6$, $y = 4-\sqrt{2}$.

Покажем, что $\angle BKC = 90°$. Действительно,

$$BK^2 + KC^2 = \left(4+\sqrt{2}\right)^2 + \left(4-\sqrt{2}\right)^2 = 6^2 = BC^2.$$

Поэтому по теореме, обратной теореме Пифагора, $AC \perp BD$.

В силу опорных задач 6 и 7, четырехугольник $ABCD$ – дельтоид, т.е. $a = b$, $x = u$. Окончательно, $DC = 6$.

Упражнение 6. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K – точка пересечения его диагоналей. Известно, что $BC > AB > BK$, $KC = \sqrt{7} - 1$, косинус угла KBC равен $\frac{\sqrt{7}+1}{4}$, а периметр треугольника BKC равен $2\sqrt{7} + 4$. Найдите DC.

Задача 11 (геологический факультет МГУ, 1998 г.). *Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найдите площадь четырехугольника $PQRS$.*

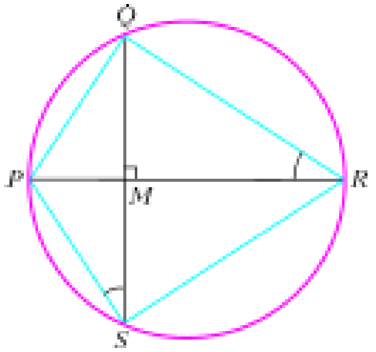


Рис. 11

Решение. По условию, $PR \perp QS$ (рис.11), тогда по теореме Пифагора найдем

$$MR = \sqrt{QR^2 - QM^2} = 24.$$

Прямоугольные треугольники PMS и QMR подобны по двум углам ($\angle PSQ = \angle PRQ = \frac{1}{2} \cup PQ$). Поэтому

$$\frac{PM}{QM} = \frac{MS}{MR} = \frac{PS}{QR} \Leftrightarrow \frac{PM}{10} = \frac{MS}{24} = \frac{13}{26} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PM = 5, \quad MS = 12.$$

Тогда

$$PR = PM + MR = 29, \; QS = QM + MS = 22.$$

Для искомой площади S четырехугольника $PQRS$ имеем

$$S = S_{\Delta PQS} + S_{\Delta RQS} = \frac{1}{2}QS \cdot PM + \frac{1}{2}QS \cdot MR =$$

$$= \frac{1}{2}QS \cdot (PM + MR) = \frac{1}{2}QS \cdot PR = 319.$$

Упражнение 7. Четыехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что $AD = 5$, $BC = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Задача 12 (Высший колледж наук о материалах МГУ, 1999 г.). *В окружность с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Известно, что угол AOB втрое больше угла COD. Найдите площадь круга, ограничиваемого окружностью, и сравните ее с числом 510, если $CD = 10$.*

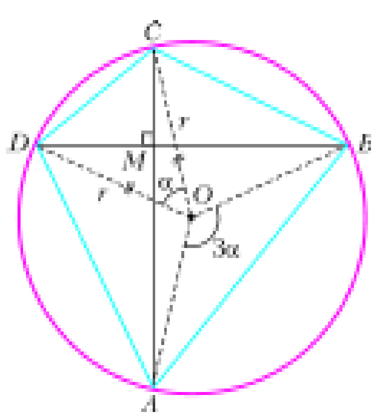


Рис. 12

Решение. Обозначим (рис.12) точку пересечения диагоналей вписанного четырехугольника $ABCD$ через M, угол COD — через α. Тогда $\angle AOB = 3\alpha$, $\cup DC = \alpha$, $\cup AB = 3\alpha$.

Используем утверждение (докажите его!): внутренний угол (т.е. угол с вершиной внутри круга) измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается.

Так как по условию $\angle DMC = 90°$, то

$$\angle DMC = \frac{\cup DC + \cup AB}{2}, \quad 90° = \frac{\alpha + 3\alpha}{2}, \quad \alpha = 45°.$$

Из равнобедренного треугольника ODC, в котором $OD = OC = r$, где r – радиус окружности, по теореме косинусов имеем

$$DC^2 = OD^2 + OC^2 - 2\,OD \cdot OC \cos\alpha,$$

$$10^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r^2 = 50\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Искомая площадь круга равна

$$S = \pi r^2 = 50\pi\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Она больше числа 510. Действительно, так как $\pi > 3{,}1$ и $\sqrt{2} > 1{,}4$, то

$$50\pi\left(2 + \sqrt{2}\right) > 50 \cdot 3{,}1 \cdot (2 + 1{,}4) = 527 > 510.$$

Упражнение 8. В окружность с центром в точке O вписан четырехугольник $KLMN$, диагонали которого перпендикулярны. Площадь круга, ограничиваемого окружностью, равна 1110. Найдите длину отрезка MN и сравните ее с числом 10, если известно, что угол MON в пять раз меньше угла KOL.

Задача 13 (факультет психологии МГУ, 1999 г.). *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон AB и CD равны 9 и 4 соответственно, $AC = 7$, $BD = 8$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.*

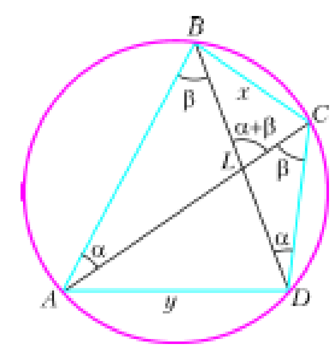


Рис. 13

Решение. Пусть (рис.13) $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$. Тогда. по следствию теоремы о вписанном угле и из теоремы о внешнем угле, для треугольника CDL имеем

$$\angle BDC = \angle BAC = \alpha, \quad \angle ACD = \angle ABD = \beta, \quad \angle BLC = \alpha + \beta.$$

Пусть также $BC = x$, $AD = y$. Из теоремы косинусов для треугольников ABC и DBC получим уравнение для $\cos\alpha$:

$$\begin{cases} x^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\alpha = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7\cos\alpha, \\ x^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD \cdot DC\cos\alpha = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4\cos\alpha. \end{cases}$$

Отсюда $81 + 49 - 126\cos\alpha = 64 + 16 - 64\cos\alpha$, и $\cos\alpha = \frac{25}{31}$.

Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{4\sqrt{21}}{31}$.

Аналогично, из треугольников ABD и ACD имеем

$$\begin{cases} y^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD\cos\beta = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8\cos\beta, \\ y^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD\cos\beta = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4\cos\beta. \end{cases}$$

Отсюда

$$\cos\beta = \frac{10}{11} \text{ и } \sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{11}.$$

Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними (докажите).

Поэтому

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin(\alpha + \beta) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \frac{1820\sqrt{21}}{341}.$$

Упражнение 9. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон KL и MN равны 3 и 5 соответственно, $KM = 7$, $LN = 6$. Отрезки KM и LN пересекаются в точке P. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLP.

Задача 14 (мехмат МГУ, 1998 г.). *Во вписанном четырехугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке E, причем* $\frac{AC}{AE} = 10$, $\frac{BD}{BE} = \frac{13}{4}$. *Радиус окружности R = 10. Одна из диагоналей четырехугольника является диаметром. Найдите длину BC.*

Решение. Пусть (рис.14) $AE = m$, $EC = 9m$, $BE = 4k$, $ED = 9k$, $m > 0$, $k > 0$. По свойству отрезков хорд $AE \cdot EC = BE \cdot ED$, или $m \cdot 9m = 4k \cdot 9k$. Отсюда

$$m = 2k,\ AC = 10m = 20k > 13k = BD.$$

Так как $AC > BD$, то AC – диаметр, и $\angle ABC = 90°$. Имеем $AC = 2R$, или $10m = 2 \cdot 10$. Тогда $m = 2$, $k = 1$, $BE = 4k = 4$, $ED = 9k = 9$, $AE = m = 2$, $EC = 9m = 18$.

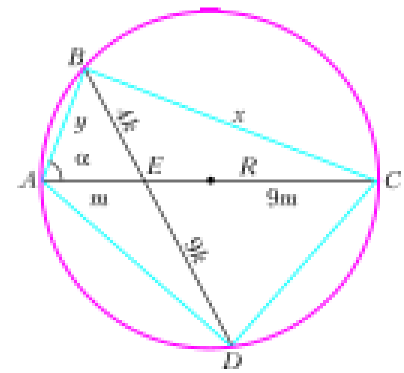


Рис. 14

Пусть $BC = x$, $AB = y$, $\angle CAB = \alpha$. Из треугольников ABC и ABE получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20^2, \\ y^2 + 2^2 - 2 \cdot 2y\cos\alpha = 4^2, \\ y^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot y\cos\alpha = x^2, \end{cases}$$

из которой следует

$$x^2 = 405,\ \text{и}\ x = 9\sqrt{5}.$$

Неравенства с модулем

(Начало см. на с. 35)

Решение.

$$(16) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 20(x-1) + 3(4x-p) - p \le 0, \\ 4x^2 - 20(x-1) - 3(4x-p) - p \le 0. \end{cases}$$

Поскольку оба неравенства в системе линейны (!) относительно p, попробуем этим воспользоваться. Решаем систему относительно p:

$$x^2 - 2x + 5 \le p \le -2x^2 + 16x - 10. \qquad (17)$$

Условие существования параметра p равносильно требованию

$$x^2 - 2x + 5 \le -2x^2 + 16x - 10 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \le x \le 5. \ (18)$$

Комментарий 1. При изучении темы «Задачи с параметрами» существенно осознавать смысл промежуточных результатов.

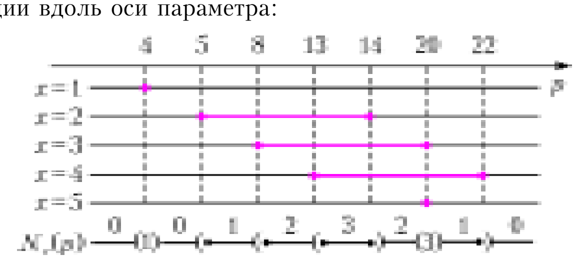
Как толковать неравенство (18)? Оно объявляет *все* значения x, которые могут быть решениями исходного неравенства (16) *хотя бы при одном* значении параметра. Следовательно, целочисленными решениями неравенства могут быть только целые числа из промежутка $[1; 5]$, т.е.

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. \qquad (19)$$

Естественно, что для любого целочисленного числа из набора (19) надо выяснить, при каких значениях параметра p это число будет решением неравенства (16). Поскольку $(17) \Leftrightarrow (16)$, то поочередно подставляя числа из набора (19) в неравенство (17), мы сразу найдем все соответствующие значения параметра:

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow 4 \le p \le 4, \\ x = 2 &\Rightarrow 5 \le p \le 14, \\ x = 3 &\Rightarrow 8 \le p \le 20, \\ x = 4 &\Rightarrow 13 \le p \le 22, \\ x = 5 &\Rightarrow 20 \le p \le 20. \end{aligned} \qquad (20)$$

Чтобы выявить значения параметра, при которых исходное неравенство имеет максимальное число целочисленных решений, воспользуемся «разверткой» полученной информации вдоль оси параметра:



Здесь для каждого утверждения из (20) цветом выделены значения параметра p, при которых истинно это утверждение. Последняя строка объявляет количество $N_x(p)$ целочисленных решений при данном значении параметра (равное числу пересечений вертикальной прямой, проходящей через соответствующую точку p на оси параметра, с выделенными точками).

Очевидно, что максимальное количество целочисленных решений равно трем ($\max N_x(p) = 3$), и это достигается, когда $13 \le p \le 14$ или $p = 20$.

Комментарий 2. Мы специально рассмотрели задачу 7 и по причине демонстрации очень полезного приема – «развертки» промежуточной информации вдоль оси параметра. Этот прием часто существенно облегчает продвижение к ответу в задачах с параметрами.

LXVIII Московская математическая олимпиада

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

6 класс

1. Таракан Валентин объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Валентин все перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (в «нормальных» м/мин) бегает таракан Валентин?

А. Хачатурян

2. На автобусе ездил Андрей
На кружок и обратно домой,
Заплатив 115 рублей,
Покупал он себе проездной.

В январе он его не достал,
И поэтому несколько дней
У шофера билет покупал
Он себе за 15 рублей.

А в иной день кондуктор с него
Брал 11 только рублей.
Возвращаясь с кружка своего,
Всякий раз шел пешком наш Андрей.

За январь сколько денег ушло,
Посчитал бережливый Андрей:
С удивлением он получил
Аккурат 115 рублей!

Сосчитайте теперь поскорей,
Сколько раз был кружок в январе?

А. Блинков, Д. и М. Вельтищевы

3. Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется – определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят ее уравнять их кучки, и тогда она заберет излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (не больше и не меньше).

б) Может ли лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

И. Раскина

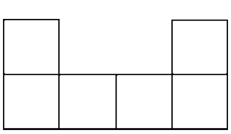


Рис. 1

4. Незнайка разместил без наложений в квадрате 10×10 только 13 фигур («скобок»), изображенных на рисунке 1. Попробуйте разместить больше.

А. Хачатурян

5. В числах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечетными?

А. Хачатурян

6. В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжет, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировали несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он – хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом ее же произнес следующий по кругу, и так они говорили «мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас еще, возможно, говорят. Определите, из каких племен были пирующие, если известно, что за столом сидели а) девять; б) десять жителей Пустоземья.

А. Заславский, А. Хачатурян

7 класс

1. На рисунке 2 изображено, как изменялся курс тугрика в течение недели. У Пети было 30 рублей. В один из дней недели он обменял все свои рубли на тугрики. Потом он обменял все тугрики на рубли. Затем он еще раз обменял все вырученные рубли на тугрики и в конце концов обменял все тугрики обратно на рубли.

Напишите, в какие дни он совершал эти операции, если в воскресенье у него оказалось 54 рубля. (Достаточно привести пример.)

И. Ященко

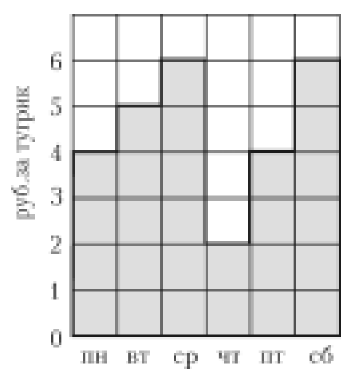


Рис. 2

2. Можно ли расставить числа а) от 1 до 7; б) от 1 до 9 по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

С.Токарев, А.Спивак

3. Зачеркните все шестнадцать точек, изображенных на рисунке 3, шестью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя отрезков по линиям сетки.

А.Спивак

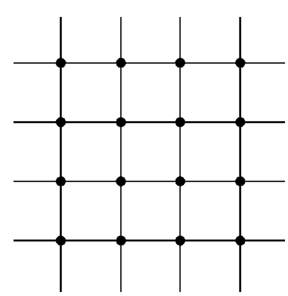


Рис. 3

4. Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из нее по клеточкам прямоугольник и нашел его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, выкинула квадратик и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь – как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?

б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.

в) Прямоугольник каких размеров мог вырезать Ваня?

А. Хачатурян

5. Решите ребус

$$250 \times \text{ЛЕТ} + \text{МГУ} = 2005 \times \text{ГОД}$$

(разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми – одинаковые; при этом некоторыми буквами могут быть обозначены уже имеющиеся цифры 2, 5 и 0.)

а) Найдите хотя бы одно решение ребуса.

б) Докажите, что других решений нет.

Д. и М.Вельтищевы

6. На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге? (Приведите пример и докажите, что больше нельзя.)

Е.Корицкая

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ СТАРШИХ КЛАССОВ

1. Клетчатый бумажный квадрат 8×8 согнули несколько раз по линиям клеток так, что получился квадратик 1×1. Его разрезали по отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон квадратика. На сколько частей мог при этом распасться квадрат? (8)[1]

С.Зайцев

2. Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y – середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны. (8)

А.Заславский

3. По кругу расставлены 2005 натуральных чисел. Докажите, что найдутся два соседних числа таких, что после их выкидывания оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равной суммой. (8)

Е.Куликов, С.Токарев

4. Разрежьте круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга не лежал на границе хотя бы одной из них. (8)

С.Маркелов

5. Существуют ли 2005 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2004 из них делится на оставшееся число? (9)

Фольклор

6. Окружность ω_1 проходит через центр окружности ω_2. Из точки C, лежащей на ω_1, проведены касательные к ω_2, вторично пересекающие ω_1 в точках A и B. Докажите, что отрезок AB перпендикулярен прямой, проходящей через центры окружностей. (9)

А. Заславский

7. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат? (9)

С. Маркелов

8. На окружности расставлено n цифр, ни одна из которых не 0. Сеня и Женя переписывают себе в тетрадки $n-1$ цифру, читая их по часовой стрелке. Оказалось, что хотя они начали с разных мест, записанные ими $(n-1)$-значные числа совпали. Докажите, что окружность можно разрезать на несколько дуг так, чтобы записанные на дугах цифры образовывали одинаковые числа. (9)

А.Канель-Белов

[1] *После условия каждой задачи в скобках указан класс, в котором она предлагалась.*

9. Существует ли плоский четырехугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны? (10)

А.Заславский

10. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между точками – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс. (10)

Е. Горский

11. Конструктор состоит из набора прямоугольных параллелепипедов. Все их можно поместить в одну коробку, также имеющую форму прямоугольного параллелепипеда. В бракованном наборе одно из измерений каждого параллелепипеда оказалось меньше стандартного. Всегда ли у коробки, в которую укладывается набор, тоже можно уменьшить одно из измерений (параллелепипеды укладываются в коробку так, что их ребра параллельны ребрам коробки)? (10)

А.Шаповалов

12. В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причем отрезки не пересекаются друг с другом. Первый игрок красит каждый отрезок в один из k цветов, затем второй игрок красит в один из тех же цветов каждую точку. Если найдутся две точки и отрезок между ними, окрашенные в один цвет, выигрывает первый игрок, в противном случае – второй. Докажите, что первый может гарантировать себе выигрыш, если а) $k = 7$; б) $k = 10$. (10)

С.Конягин

13. Доска размером 2005×2005 разделена на квадратные клетки со стороной единица. Некоторые клетки доски в каком-то порядке занумерованы числами 1, 2, … так, что на расстоянии, меньшем 10, от любой незанумерованной клетки найдется занумерованная клетка. Докажите, что найдутся две клетки на расстоянии, меньшем 150, которые занумерованы числами, различающимися более чем на 23. Расстояние между клетками – это расстояние между их центрами. (11)

А.Скопенков, Д.Пермяков

14. С выпуклым четырехугольником $ABCD$ проделывают следующую операцию: одну из данных вершин меняют на точку, симметричную этой вершине относительно серединного перпендикуляра к диагонали (концом которой она не является), обозначив новую точку прежней буквой. Эту операцию последовательно применяют к вершинам A, B, C, D, A, B,… – всего n раз. Назовем четырехугольник допустимым, если его стороны попарно различны и после применения любого числа операций он остается выпуклым. Существует ли

а) допустимый четырехугольник, который после $n < 5$ операций становится равным исходному;

б) такое n_0, что любой допустимый четырехугольник после $n = n_0$ операций становится равным исходному? (11)

А.Устинов

15. На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Миша мысленно выбирает n точек, а Коля пытается их разгадать. За одну попытку Коля указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Миша сообщает Коле расстояние от нее до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Коля умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Коля наверняка разгадать все выбранные точки менее чем за $(n+1)^2$ попыток? (11)

О.Косухин

Публикацию подготовил Б.Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. Цилиндрический пластмассовый стакан имеет дно толщиной 1 см. Если опустить стакан в большой сосуд с водой, то он будет плавать в вертикальном положении, погрузившись на 3 см. Если затем налить в него слой неизвестной жидкости высотой 3 см, то стакан окажется погруженным на 5 см. Сколько еще нужно долить в него той же жидкости, чтобы ее уровень совпал с уровнем «забортной» воды?

А.Зильберман

2. Стеклянная открытая сверху трубка постоянного поперечного сечения имеет форму латинской буквы L. Одно ее колено – горизонтальное, оно имеет длину $l_1 = 10$ км и запаяно на конце. Другое колено длиной $l_2 = 1{,}2$ м – вертикальное, конец его открыт. Трубка полностью заполнена водой при температуре 0 °С. Найдите, как меняется давление вблизи закрытого конца трубки при изменении температуры воды от 0 °С до +8 °С. Зависимость плотности воды ρ от температуры t приведена в таблице:

t, °С	0	1	2	3	4
ρ, кг/м^3	999,841	999,900	999,941	999,965	999,973
t, °С	5	6	7	8	
ρ, кг/м^3	999,965	999,941	999,910	999,849	

Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, геометрические размеры трубки считать неизменными.

С.Варламов

3. Любители чая считают, что кипяток, налитый в чашку, может заметно остыть даже за несколько секунд, что испортит качество получившегося чая. Проверим, правы ли они.

Над чашкой очень горячей воды поднимается пар. Скорость подъема пара, оцениваемая на глаз, равна $v = 0{,}1$ м/с. Считая, что весь поднимающийся над чашкой пар имеет температуру 100 °С, оцените скорость остывания чашки с очень горячей водой за счет испарения воды (эта скорость измеряется в градусах за секунду.) Масса воды в чашке $m = 200$ г, площадь поверхности воды $S = 30$ см^2, удельная теплота испарения воды $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°С), плотность водяного пара при 100 °С равна $\rho = 0{,}58$ кг/м^3.

А.Андрианов

9 класс

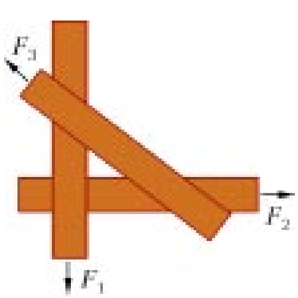


Рис. 1

1. На гладкой горизонтальной поверхности лежат три тонкие доски, как показано на рисунке 1. Их начинают медленно (без ускорения) растаскивать, прикладывая к доскам горизонтальные силы. В некоторый момент две из этих сил взаимно перпендикулярны, а их величины равны $F_1 = 3$ Н и $F_2 = 4$ Н. Определите величину F_3 третьей силы.

И.Горбатый

2. На длинную тележку, движущуюся со скоростью v без трения по горизонтальным рельсам, сыплется сверху песок так, что за каждую секунду на нее попадает μ килограммов песка. Точно такое же количество песка сбрасывается с тележки с постоянной относительно нее скоростью u в направлении, противоположном ее движению. Какую горизонтальную силу нужно прикладывать к тележке, чтобы поддерживать ее скорость постоянной?

О.Шведов

3. При достижении температуры +910 °С в железе происходит полиморфное превращение: элементарная ячейка его кристаллической решетки из кубической объемноцентрированной превращается в кубическую гранецентрированную – железо из α-фазы переходит в γ-фазу. При этом плотность железа уменьшается на $\varepsilon \approx 2\%$. Найдите отношение постоянных решеток железа в α- и γ-фазах.

Примечание. Постоянной a кубической решетки называют длину ребра куба элементарной ячейки. В объемноцентрированной решетке ионы железа находятся в вершинах и в центре куба, а в гранецентрированной – в вершинах куба и в центрах каждой из его граней.

В.Погожев

4. Реальный амперметр можно представить как идеальный амперметр с нулевым сопротивлением, соединенный последовательно с некоторым резистором. С помощью данного реального амперметра поочередно измеряют электрические токи, текущие через резисторы и источник питания в цепи, схема которой изображена на рисунке 2. Амперметр показывает, что токи через каждый резистор одинаковы и равны 6 мА, а ток через источник равен 11 мА. Что показал бы идеальный амперметр при измерении этих же токов? Источник считать идеальным.

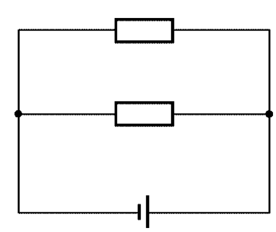


Рис. 2

О.Шведов

10 класс

1. Автомобиль с передними ведущими колесами должен проехать по достаточно длинному прямолинейному участку шоссе, поднимающемуся вверх под углом α к горизонту. Центр масс автомобиля находится на расстоянии h от полотна дороги и посередине между осями передних и задних колес, которые расположены на расстоянии $2L$ друг от друга. Коэффициент трения колес о дорогу μ, радиус колес R. Найдите максимальную величину угла α. Укажите условия, при которых автомобиль массой m сможет преодолеть этот участок шоссе.

В.Погожев

2. Найдите общую жесткость системы пружин, изображенной на рисунке 3, если внешняя сила прикладывается к верхней платформе в вертикальном направлении. Лестница,

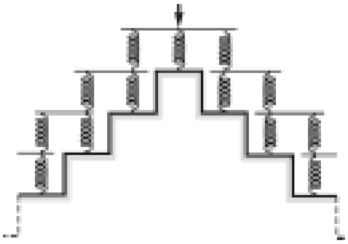


Рис. 3

на которую опираются пружины, бесконечна. Все платформы при сжатии пружин сохраняют горизонтальное положение и не касаются ступенек лестницы. Каждая из платформ, кроме самой верхней, опирается на две пружины. Жесткости всех пружин одинаковы и равны k, оси всех пружин вертикальны. Массой пружин и платформ можно пренебречь.

Н.Пекалин

3. В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке 4, вольтметр и батарейка идеальные. Диод при включении в обратном направлении не пропускает ток, а при

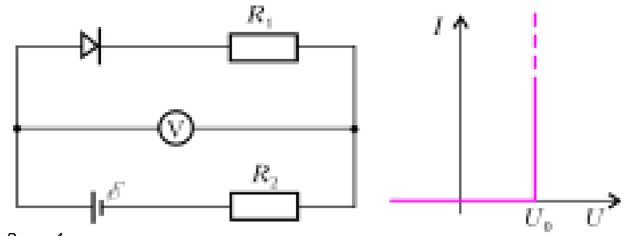


Рис. 4

включении в прямом направлении открывается при напряжении U_0 (вольт-амперная характеристика диода приведена на графике). Что показывает вольтметр в этой цепи? Что он будет показывать, если изменить полярность включения диода?

О.Шведов

4. На горизонтальном столе стоит прозрачный цилиндр с радиусом основания R и высотой H_1, изготовленный из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$. На высоте H_2 над верхним основанием цилиндра на его оси расположен точечный источник света. Найдите площадь тени, отбрасываемой цилиндром на поверхность стола.

Д.Харабадзе

11 класс

1. Имеются два одинаковых длинных однородных легких бруска, которые используют для проведения экспериментов по изучению прочности древесины. В первом эксперименте деревянный брусок положили концами на спинки двух стоящих стульев, а к его середине подвесили сосуд, который начали медленно заполнять водой. Когда масса сосуда с водой достигла величины $m = 4{,}8$ кг, брусок сломался. Во втором эксперименте брусок положили на гладкий горизонтальный стол, к его концам прикрепили два груза малых размеров с массами $m_1 = 6$ кг каждый, а к середине – груз массой $m_2 = 10$ кг и веревку, за которую стали тянуть с плавно возрастающей силой F, перпендикулярной бруску и направленной горизонтально. При какой величине силы F брусок сломается? Считать $g = 10$ м/с^2.

С.Варламов

2. Маленькая шайба, скользившая со скоростью v_0 по гладкому льду поперек реки, попала на горизонтальный участок берега, на котором по мере удаления от кромки льда на расстояние x коэффициент трения возрастает по закону $\mu = \mu_0 + kx$, где μ_0 и k – постоянные величины. Найдите, спустя какое время после выхода на берег шайба остановится.

М.Семенов

3. Теплоизолированный закрытый вертикальный цилиндр разделен на две равные части тонким массивным теплопроводящим поршнем. Сверху и снизу от поршня, закрепленного вначале посередине цилиндра, находятся одинаковые количества идеального одноатомного газа при температуре T и давлении p. После освобождения поршня он сместился вниз на некоторое расстояние и остановился в новом положении равновесия, при котором разность давлений в нижней и верхней частях цилиндра равна Δp. Найдите, на какую величину ΔT изменилась при этом температура газа. Теплоемкостью поршня и стенок цилиндра пренебречь.

О.Шведов

4. Незаряженные конденсаторы с емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ соединили последовательно и подключили к источнику напряжения $U = 4{,}5$ В. После того как конденсаторы зарядились, металлическим пинцетом на достаточно большое время замкнули выводы конденсатора емкостью C_2, а затем пинцет убрали. Каким станет после этого заряд конденсатора емкостью C_1?

И.Горбатый

5. Бесконечная электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 5, состоит из одинаковых батареек и одинаковых вольтметров. Показание самого левого вольтметра равно U, а показание каждого из следующих вольтметров в n раз меньше, чем у соседнего с ним слева ($n > 1$). Найдите ЭДС батарейки.

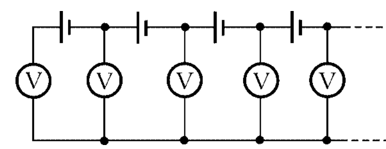


Рис. 5

О.Шведов

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. На длинном прямом шоссе автомобили движутся с постоянной скоростью v_1 всюду, за исключением моста, на котором автомобили движутся с другой постоянной скоростью v_2. На рисунке 6 изображен график зависимости расстояния l между двумя едущими друг за другом автомобилями от времени t. Найдите скорости v_1 и v_2, а также длину моста.

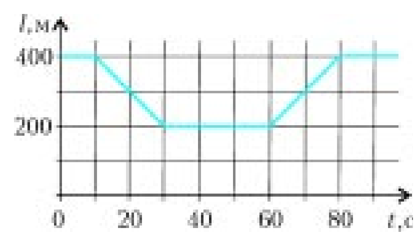


Рис. 6

О.Шведов

2. В системе, изображенной на рисунке 7, груз, подвешенный к легкому подвижному блоку, представляет собой льдинку массой 400 г, плавающую в воде при температуре 0 °С. Второй груз изготовлен из алюминия, имеет массу 160 г и касается поверхности воды. При этом система находится в равновесии. Какое количество теплоты надо сообщить системе, чтобы алюминиевый груз оказался на дне сосуда? Вертикальные размеры грузов меньше глубины сосуда, плотности льда и алюминия равны 0,9 г/см^3 и 2,7 г/см^3 соответственно, нити достаточно длинные, невесомые и нера-

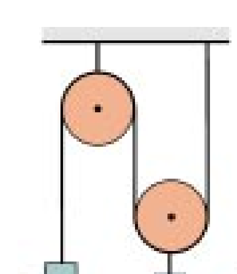


Рис. 7

стяжимые, трения нет. Удельная теплота плавления льда равна 335 Дж/г. Силами поверхностного натяжения пренебречь.

О.Шведов

3. В электрических цепях часто используют двухпозиционные переключатели, которые могут, в зависимости от положения перемычки *П*, соединять друг с другом либо контакты *0* и *1*, либо контакты *0* и *2* (рис.8). Нарисуйте схему, состоящую из двух таких переключателей, двух одинаковых лампочек и одной батарейки, чтобы при четырех различных положениях перемычек переключателей она работала следующим образом: 1) обе лампочки не горят; 2) одна лампочка не горит, а другая горит в полный накал; 3) обе лампочки горят в полный накал; 4) обе лампочки горят в полнакала. Известно, что лампочка горит в полный накал, если ее подключить непосредственно к батарейке, а в полнакала лампочки горят в том случае, если они соединены с батарейкой последовательно. Учтите, что в сконструированной вами цепи ни при каких положениях перемычек переключателей не должно происходить короткое замыкание батарейки.

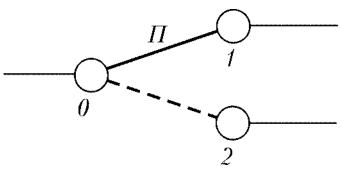


Рис. 8

Д.Харабадзе

9 класс

1. Велосипед имеет два одинаковых колеса, расстояние между осями которых L. При повороте велосипеда его переднее колесо, повернутое на некоторый угол относительно рамы, вращается вокруг своей оси в n раз быстрее заднего. Найдите радиусы окружностей, по которым катятся по земле переднее и заднее колеса. Наклон велосипеда и проскальзывание его колес не учитывать.

Д.Харабадзе

2. Барон Мюнхгаузен поднялся на привязанном воздушном шаре над полем боя на высоту H. Мимо него параллельно земле пролетает тяжелое ядро, пущенное из лагеря неприятеля. Барон садится на ядро и летит на нем до самой земли. Найдите, под каким углом α к горизонту было запущено ядро, если Мюнхгаузен приземлился на расстоянии H по горизонтали от воздушного шара. Массы ядра и барона одинаковы. Сопротивлением воздуха пренебречь.

В.Палюлин

3. Из неиссякаемого источника через круглую трубу с внутренним диаметром $D = 5$ см вертикально вниз вытекает струя воды. Ведра емкостью $V = 10$ л подставляют под струю так, что верх ведра находится на $H = 1{,}5$ м ниже конца трубы. На уровне верха ведра диаметр струи равен $d = 4$ см. Каков расход воды у источника? Ответ выразите в «ведрах в час».

С.Варламов

4. Внутри прозрачного клина перпендикулярно плоскости рисунка 9 течет жидкость с изменяющимся составом, так что ее показатель преломления n изменяется со временем t по закону $n(t) = 1 + n_0\,t/\tau$, где n_0 и τ – постоянные величины. На этот клин перпендикулярно падает узкий луч света и, пройдя через клин, попадает на экран. Угол α при вершине клина мал, толщина клина в месте падения луча равна a, расстояние между экраном и клином $d \gg a$. Найдите скорость движения светлого пятна по экрану.

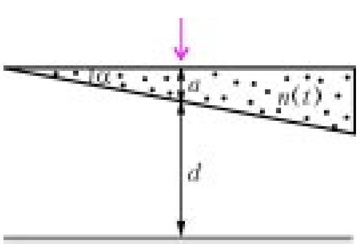


Рис. 9

Указание: при малых значениях угла α можно пользоваться приближенными формулами $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

В.Палюлин

10 класс

1. В системе, изображенной на рисунке 10, масса подвижного блока равна M и равномерно распределена по ободу. Нить невесома, нерастяжима и не проскальзывает по блоку. За свободный конец нити тянут с силой F вертикально вверх. Найдите ускорение груза массой m. Трением в оси блока и о воздух пренебречь.

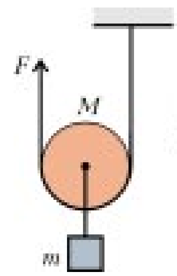


Рис. 10

О.Шведов

11 класс

1. На горизонтальной поверхности лежит однородный стержень. Его медленно поднимают, прикладывая к одному из концов силу, все время направленную перпендикулярно стержню. При каком минимальном коэффициенте трения между стержнем и поверхностью можно таким образом поставить стержень в вертикальное положение без проскальзывания его нижнего конца?

И.Горбатый

2. Над идеальным одноатомным газом совершается равновесный процесс $1-2-3-4-5-6-7$. На рисунке 11 изображен график зависимости количества теплоты Q, сообщенного газу в данном процессе (отсчитывая от его начала), от абсолютной температуры газа T. Все параметры, заданные на осях графика, известны. Найдите, при каких соотношениях между этими параметрами объем газа в результате данного процесса: а) увеличивается; б) уменьшается; в) остается неизменным.

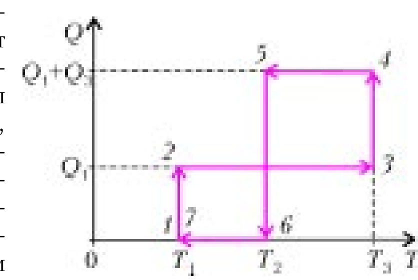


Рис. 11

О.Шведов

3. К штативу, установленному на тележке, на легкой нерастяжимой нити *1* подвешен маленький шарик массой M, к которому на легкой нерастяжимой нити *2* подвешен другой маленький шарик массой m (рис. 12). Под действием внешней силы, изменяющейся со временем по гармоническому закону с частотой ω, тележка совершает малые колебания в горизонтальном направлении. При какой длине нити *2* нить *1* будет все время оставаться строго вертикальной? Влиянием воздуха на движение тел пренебречь.

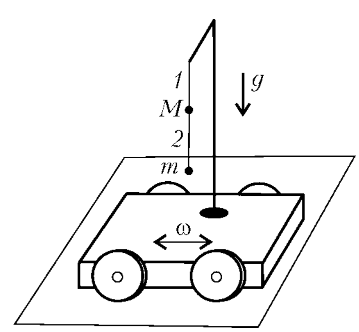


Рис. 12

В.Погожев

Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута

Лауреаты Всероссийского конкурса школьных учителей физики и математики 2005 года

(Начало см. на с 18)

Молодой учитель

Алтайский край
Бийск. *Овечкина Татьяна Николаевна.* М. Гимназия 11
Амурская область
Благовещенск. *Павлюченко Людмила Викторовна.* Ф. Школа 126
Кабардино-Балкария
Прималкинское. *Протасова Юлия Владимировна.* М. Прималкинская школа
Калининградская область
Калининград. *Старунова Ирина Владимировна.* Ф. Лицей 23
Кемеровская область
Пригородный. *Тюшина Татьяна Геннадьевна.* Ф. Школа 40
Прокопьевск. *Кондратьева Евгения Юрьевна.* Ф. Школа 45
Краснодарский край
Каневская. *Жукова Ольга Павловна.* Ф. Лицей
Москва
Самсонов Павел Иванович. М. Школа 129
Царькова Ольга Германовна. Ф. Школа 2007
Московская область
Долгопрудный. *Подлипский Олег Константинович.* М. Школа 5
Нижегородская область
Грудцыно. *Кашичкина Ирина Владимировна.* Ф. Грудцынская школа
Павлово. *Лукина Марина Сергеевна.* Ф. Школа 11
Омская область
Ингалы. *Цвецих Андрей Викторович.* М. Ингалинская школа
Омск. *Уткина Ирина Викторовна.* Ф. Гимназия 75
Самарская область
Самара. *Нилова Наталья Николаевна.* М. Школа 32
Самара. *Останина Анна Геннадьевна.* Ф. Школа 120
Усинское. *Морозов Иван Анатольевич.* М. Усинская школа
Санкт-Петербург
Маннинен Сергей Анатольевич. Ф. Лицей «ФТШ»
Потапов Андрей Александрович. М. Школа 22 (I реальная)
Рухленко Иван Дмитриевич. Ф. Школа 373
Финагин Андрей Алексеевич. Ф. ФМЛ 239
Саратовская область
Балаково. *Караваева Юлия Геннадьевна.* Ф. Гимназия 2
Тамбовская область
Моршанск. *Бруднова Елена Александровна.* Ф. Школа 3
Моршанск. *Моклакова Наталия Александровна.* Ф. Школа 1 им. А.С. Пушкина
Татарстан
Казань. *Мурочкина Юлия Григорьевна.* М. Лицей 145
Казань. *Саттарова Миляуша Мансуровна.* М. Татарская гимназия 1
Мамадыш-Акилово. *Ашерапов Азат Саматович.* Ф. Мамадыш-Акиловская школа
Удмуртия
Ижевск. *Нечаева Ольга Сергеевна.* М. ЭМЛ 29
Челябинская область
Челябинск. *Фокин Андрей Владимирович.* Ф. Лицей 31
Челябинск. *Хохлова Вера Владимировна.* Ф. Лицей 11

Учитель, воспитавший Ученика

Калининградская область
Калининград. *Атрахимович Евгения Александровна.* М. Школа 17
Липецкая область
Липецк. *Чупринина Валентина Васильевна.* Ф. Школа 5
Москва
Буракова Людмила Григорьевна. Ф. Школа 26
Гольдман Александр Михайлович. М. Школа 315
Гуревич Александр Евсеевич. Ф. Школа 315
Кирзимов Владимир Александрович. М. ЦО «Царицыно»
Курбанов Джамал Исаевич. М. ЦО «Царицыно»
Савченко Анатолий Анатольевич. Ф. ЦО «Царицыно»
Смирнова Дина Петровна. М. Школа 26
Московская область
Дубна. *Аргунова Анна Леонидовна.* М. Лицей «Дубна»
Дубна. *Ломаченков Иван Алексеевич.* Ф. Лицей «Дубна»
Нижегородская область
Нижний Новгород. *Балакин Михаил Александрович.* Ф. НТЛ 38
Нижний Новгород. *Белослудцев Николай Михайлович.* М. Лицей (Центр одаренных детей)
Нижний Новгород. *Долинина Юлия Гиниятовна.* Ф. Школа 154
Нижний Новгород. *Ковалев Владимир Юрьевич.* Ф. Лицей 40
Нижний Новгород. *Котов Александр Петрович.* М. НТЛ 38
Нижний Новгород. *Степанова Людмила Ивановна.* М. Лицей 40
Новосибирская область
Новосибирск. *Михеев Юрий Викторович.* М. СУНЦ НГУ
Санкт-Петербург
Башарина Людмила Алексеевна. Ф. Школа 85
Дрибинская Тамара Григорьевна. М. Школа 85
Меленевская Мария Тарасовна. М. ФМЛ 239
Минарский Андрей Михайлович. Ф. Лицей «ФТШ»
Столбов Константин Михайлович. М. Лицей «ФТШ»
Терехов Виктор Максимович. Ф. ФМЛ 239
Саратовская область
Саратов. *Жильцова Алевтина Анатольевна.* Ф. Школа 6
Саратов. *Макарова Валентина Васильевна.* М. Школа 6
Саратов. *Правдина Людмила Вениаминовна.* Ф. Школа 1
Свердловская область
Екатеринбург. *Инишева Ольга Викторовна.* Ф. СУНЦ УрГУ
Екатеринбург. *Никольская Ирина Владимировна.* М. Лицей 130
Ярославская область
Ярославль. *Салов Лев Александрович.* Ф. Гимназия 33

Наставник будущих ученых

Алтайский край
Барнаул. *Дергунов Василий Васильевич.* Ф. Лицей 42
Барнаул. *Оскорбин Дмитрий Николаевич.* М. Лицей 42
Бийск. *Гаевская Ирина Сергеевна.* М. Лицей
Бийск. *Моргунов Михаил Николаевич.* Ф. Лицей
Бийск. *Штейнбах Екатерина Васильевна.* М. Гимназия 11
Горно-Алтайск. *Вожаков Юрий Михайлович.* Ф. Республиканский классический лицей
Горно-Алтайск. *Домольчук Валентина Романовна.* М. Гимназия 3
Горно-Алтайск. *Зыкова Лариса Ивановна.* М. Республиканский классический лицей
Архангельская область
Вычегодский. *Сухнева Тамара Алексеевна.* Ф. Школа 4
Северодвинск. *Колесова Наталья Геннадьевна.* М. Лицей 17
Северодвинск. *Шокин Борис Павлович.* Ф. Лицей 17
Североонеженск. *Выморков Сергей Васильевич.* Ф. Школа 1
Североонеженск. *Малиновская Татьяна Григорьевна.* М. Школа 1
Башкортостан
Белорецк. *Горячих Олег Викторович.* Ф. Белорецкая комплексная школа
Белорецк. *Женодаров Рустем Гусманович.* М. Белорецкая комплексная школа
Кумертау. *Хайретдинов Талгат Рафкатович.* Ф. Республиканский политехнический лицей

Брянская область
Брянск. *Козлова Елена Александровна.* Ф. Лицей 1
Брянск. *Тюкачева Ольга Ивановна.* М. Лицей 1
Брянск. *Широков Сергей Филиппович.* Ф. Гимназия 2
Унеча. *Кургуз Елена Александровна.* Ф. Школа 2
Бурятия
Кижинга. *Мункин Виктор Санжимитыпович.* Ф. Лицей 1
Нижний Торей. *Грыдин Василий Федорович.* Ф. Нижнеторейская школа 1
Хоринск. *Лебедева Татьяна Петровна.* Ф. Школа 2
Хоринск. *Сутурина Галина Николаевна.* М. Школа 2
Волгоградская область
Волгоград. *Исаева Людмила Александровна.* М. Лицей 1
Волгоград. *Манзюк Олег Дмитриевич.* Ф. Лицей 1
Воронежская область
Воронеж. *Бритикова Лариса Алексеевна.* М. Гимназия 58 им. Н.Г. Басова
Землянск. *Катаева Надежда Степановна.* М. Школа 1
Нововоронеж. *Боева Валентина Анатольевна.* Ф. Школа 1
Нововоронеж. *Ровнова Роза Васильевна.* М. Школа 1
Павловск. *Лебедева Людмила Ефимовна.* М. Школа 2
Иркутская область
Ангарск. *Лавренюк Елена Николаевна.* Ф. Школа 10
Ангарск. *Нефедова Эмилия Михайловна.* М. Лицей 2
Ангарск. *Чепелева Наталья Викторовна.* М. Школа 10
Иркутск. *Мельникова Мария Ивановна.* М. Лицей 2
Иркутск. *Попкович Марина Юрьевна.* Ф. Лицей ИГУ
Иркутск. *Роскин Олег Вадимович.* Ф. Лицей-интернат 1
Иркутск. *Чигрин Юрий Аркадьевич.* Ф. Лицей 2
Слюдянка. *Попова Нина Алексеевна.* Ф. Школа 4
Калининградская область
Калининград. *Прохазко Наталья Владимировна.* Ф. Лицей 23
Калмыкия
Элиста. *Волкова Елена Михайловна.* М. Элистинский лицей
Калужская область
Обнинск. *Латышев Владимир Николаевич.* М. ФТШ 15
Камчатская область
Петропавловск-Камчатский. *Курносов Валерий Михайлович.* Ф. Школа 33
Карелия
Петрозаводск. *Соболева Ирина Николаевна.* М. Державинский лицей
Кемеровская область
Белово. *Попов Геннадий Никитович.* Ф. Школа 1
Березовский. *Воробьева Надежда Николаевна.* М. Школа 15
Зеленогорский. *Шардакова Ольга Николаевна.* М. Лицей-интернат
Кемерово. *Титаева Нина Спиридоновна.* М. Школа 26
Тисуль. *Андреева Татьяна Евгеньевна.* Ф. Школа 1
Юрга. *Усков Олег Владимирович.* Ф. Гимназия 10
Кировская область
Киров. *Исупов Михаил Васильевич.* Ф. ФМЛ 35
Коми
Ухта. *Дацук Юлия Рафаиловна.* М. Гуманитарно-педагогический лицей
Красноярский край
Ангарский. *Лиханов Михаил Андреевич.* М. Школа 5
Курганская область
Курган. *Павловская Зинаида Николаевна.* М. Гимназия 47
Курская область
Железногорск. *Азарова Екатерина Павловна.* Ф. Школа 11
Железногорск. *Лютикова Елена Александровна.* М. Школа 11
Курчатов. *Логачев Иван Ефимович.* Ф. Гимназия 2
Курчатов. *Шумеев Юрий Николаевич.* Ф. Лицей 3
Ленинградская область
Кингисепп. *Кузнецова Надежда Валерьевна.* М. Гимназия 7
Кингисепп. *Кутаева Татьяна Константиновна.* М. Гимназия 7
Кингисепп. *Назаров Виктор Валентинович.* Ф. Гимназия 7
Липецкая область
Липецк. *Козлова Ольга Васильевна.* Ф. Школа 69
Марий Эл
Красногорский. *Гизатуллина Галия Нишановна.* М. Школа 2
Мордовия
Саранск. *Морозова Антонина Ивановна.* Ф. Школа 36
Москва
Александров Дмитрий Анатольевич. Ф. Лицей «Вторая школа»
Аматуни Анаида Рафаэловна. Ф. Школа 91
Андреев Дмитрий Витальевич. М. Школа 1303
Аникеев Дмитрий Иванович. Ф. Школа 57
Балабанов Александр Иванович. М. Лицей «Вторая школа»
Варламов Сергей Дмитриевич. Ф. СУНЦ МГУ
Выродов Евгений Александрович. Ф. Школа 57
Горбушин Сергей Александрович. Ф. Школа 1514
Гордин Рафаил Калманович. М. Школа 57
Горкина Татьяна Борисовна. Ф. Школа 1534
Горская Ольга Робертовна. М. Школа 1514
Зильберман Александр Рафаилович. Ф. Лицей «Вторая школа»
Златкис Юлий Абрамович. М. ЛИТ 1533
Иванов Георгий Александрович. Ф. Лицей 1557
Ицкович Олег Юрьевич. Ф. ЛИТ 1533
Кожухов Игорь Борисович. М. Лицей 1557
Русаков Александр Александрович. М. СУНЦ МГУ
Сергеев Игорь Николаевич. М. СУНЦ МГУ
Синякова Стелла Леонидовна. М. Школа 315
Чеботарев Александр Андреевич. Ф. Школа 1567
Московская область
Дубна. *Замятнин Михаил Юрьевич.* Ф. «Дубна»
Дубна. *Петрова Анна Владимировна.* М. Лицей 6
Королев. *Ломакина Марина Владимировна.* М. ЛНИП 4
Сергиев Посад. *Дмитриева Валентина Викторовна.* Ф. ФМЛ 2
Сергиев Посад. *Мрачковская Татьяна Григорьевна.* М. ФМЛ 2
Сергиев Посад. *Русаков Анатолий Васильевич.* Ф. ФМЛ 2
Сергиев Посад. *Чумичева Людмила Владимировна.* М. ФМЛ 2
Фрязино. *Калганова Лидия Даниловна.* Ф. Школа 1
Фрязино. *Романов Николай Иванович.* М. Школа 1
Фрязино. *Рябова Тамара Юрьевна.* М. Школа 1
Фрязино. *Чжан Михаил Бенович.* Ф. Лицей
Черноголовка. *Филатов Василий Викторович.* Ф. Школа 82
Мурманская область
Апатиты. *Щукина Любовь Николаевна.* М. Гимназия 1
Полярные Зори. *Андреева Валентина Геннадьевна.* М. Гимназия 4
Полярные Зори. *Конкин Александр Николаевич.* Ф. Гимназия 1
Нижегородская область
Нижний Новгород. *Малашкин Владимир Владимирович.* Ф. Школа 85
Нижний Новгород. *Рейман Александр Михайлович.* Ф. Лицей 40
Саров. *Завада Валентина Федоровна.* Ф. Лицей 15
Саров. *Ивонина Юлия Савельевна.* Ф. Лицей 3
Саров. *Киреева Юлия Анатольевна.* М. Лицей 15
Саров. *Лыжова Нина Николаевна.* М. Лицей 15
Саров. *Полевая Елена Владимировна.* М. Лицей 3
Саров. *Смердова Раиса Анатольевна.* Ф. Школа 2
Саров. *Шморин Игорь Тимофеевич.* Ф. Школа 17 (Тьютор)
Новгородская область
Новгород. *Токарев Александр Васильевич.* Ф. Гимназия 2
Новосибирская область
Криводановка. *Кондакова Евдокия Федоровна.* М. Школа 22
Криводановка. *Романова Ольга Петровна.* Ф. Школа 22
Новосибирск. *Аглиулин Идрис Шайхимулевич.* Ф. Гимназия 42
Новосибирск. *Башкатов Юрий Леонидович.* Ф. Лицей 130
Новосибирск. *Гой Елена Иулиановна.* М. Гимназия 5

Новосибирск. *Заковряшина Ольга Владимировна.* Ф. Лицей НГТУ
Новосибирск. *Калашникова Алла Григорьевна.* М. Лицей НГТУ
Новосибирск. *Козлова Татьяна Александровна.* М. Лицей НГТУ
Новосибирск. *Таныгин Борис Леонтьевич.* М. Лицей 130
Новосибирск. *Цецохо Сергей Викторович.* М. Школа 112
Омская область
Омск. *Веприк Валентина Константиновна.* М. Школа 88
Омск. *Левенко Ольга Евгеньевна.* Ф. ФМЛ 64
Пензенская область
Заречный. *Сеитов Андрей Иванович.* Ф. Лицей 230
Пермская область
Кунгур. *Занина Елена Леонидовна.* Ф. Лицей 21
Пермь. *Мартынова Лилия Дмитриевна.* Ф. Школа 2
Пермь. *Медведева Нина Николаевна.* Ф. Школа 17
Пермь. *Полянский Сергей Евгеньевич.* Ф. Школа 146
Пермь. *Чиклин Александр Владимирович.* Ф. Школа 146
Чернушка. *Заболотных Нина Николаевна.* Ф. Школа 6
Чусовой. *Паукова Валентина Алексеевна.* М. Школа 7
Приморский край
Артем. *Качура Людмила Федоровна.* Ф. Школа 11
Артем. *Машко Наталья Ивановна.* М. Школа 11
Псковская область
Дедовичи. *Матвеева Эльза Валерьевна.* Ф. Школа 2
Ростовская область
Ростов-на-Дону. *Богатин Александр Соломонович.* Ф. Школа 101
Ростов-на-Дону. *Бухтояров Владимир Владимирович.* М. Классический лицей 1 при РГУ
Ростов-на-Дону. *Крыштоп Виктор Геннадьевич.* Ф. Классический лицей 1 при РГУ
Ростов-на-Дону. *Филиппенко Валерий Павлович.* Ф. Школа 25
Ростов-на-Дону. *Цветянский Александр Леонидович.* Ф. Школа 101
Таганрог. *Погорелов Евгений Николаевич.* Ф. ТМОЛ
Самарская область
Суходол. *Могузева Людмила Александровна.* Ф. Школа 2
Санкт-Петербург
Александров Павел Донатович. Ф. ФМЛ 239
Богданов Сергей Александрович. Ф. Лицей 393
Голованова Татьяна Михайловна. М. Лицей 393
Злотин Семен Евсеевич. М. ФМЛ 366
Ильина Анастасия Николаевна. М. Лицей 30
Калманов Константин Михайлович. М. Школа 419
Лейбсон Константин Львович. М. ФМЛ 239
Ниренбург Татьяна Леонидовна. М. Лицей 30
Пратусевич Максим Яковлевич. М. ФМЛ 239
Слуцкий Юрий Лазаревич. Ф. ФМЛ 239
Старобогатов Игорь Олегович. Ф. Гимназия 261
Удальцова Нелли Набиевна. М. Гимназия 261
Фадеева Валентина Николаевна. Ф. ФМЛ 366
Шифман Михаил Львович. Ф. Лицей 30
Шурухин Виталий Олегович. Ф. Лицей 30
Юргенсон Юлия Рувимовна. Ф. Лицей 30
Саратовская область
Балаково. *Грекова Людмила Михайловна.* Ф. Лицей 27
Балаково. *Мигунов Федор Юрьевич.* М. Лицей 1
Саратов. *Буров Георгий Васильевич.* Ф. Лицей прикладных наук
Саратов. *Дмитриев Олег Юрьевич.* М. ФТЛ 1
Саратов. *Козырева Надежда Анатольевна.* Ф. ФТЛ 1
Саратов. *Сырыщева Наталья Михайловна.* М. Лицей прикладных наук
Саха Якутия
Борогонцы. *Кривошапкин Иннокентий Иннокентьевич.* Ф. Гимназия 1
Нюрба. *Николаева Анфиса Афанасьевна.* М. Технический лицей
Октемцы. *Ноева Мария Гавриловна.* Ф. Октемцовская школа
Чурапча. *Яковлев Гаврил Михайлович.* Ф. Чурапчинская школа
Сахалинская область
Оха. *Ельченинова Людмила Иосифовна.* Ф. Лицей 6
Свердловская область
Екатеринбург. *Саночкин Вячеслав Афанасьевич.* Ф. СУНЦ УрГУ
Екатеринбург. *Сибирцева Екатерина Александровна.* Ф. Гимназия 9
Екатеринбург. *Черемичкин Сергей Алексеевич.* Ф. СУНЦ УрГУ
Смоленская область
Десногорск. *Афонченко Галина Георгиевна.* М. Школа 4
Десногорск. *Корешкина Галина Николаевна.* Ф. Школа 1
Тамбовская область
Рассказово. *Казаков Виталий Николаевич.* Ф. Школа 10
Рассказово. *Протасевич Лидия Дмитриевна.* М. Школа 10
Рассказово. *Саяпина Любовь Александровна.* Ф. Школа 10
Строитель. *Ишков Алексей Иванович.* Ф. Цнинская школа
Тамбов. *Зайцев Вадим Львович.* Ф. Многопрофильный лицей 6
Тамбов. *Якунин Вячеслав Иванович.* Ф. Школа 14
Татарстан
Альметьевск. *Дугаев Петр Евгеньевич.* Ф. ЕМГ 22
Тверская область
Тверь. *Вольф Петр Оттович.* Ф. Школа 17
Тверь. *Гулевич Сергей Анатольевич.* М. Школа 17
Томская область
Кожевниково. *Адаменко Ольга Анатольевна.* Ф. Школа 1
Томск. *Горлова Ольга Александровна.* М. Лицей 9
Томск. *Казанцева Лариса Хазиевна.* Ф. Школа
Тульская область
Алексин. *Айдель Ирина Евгеньевна.* Ф. Реальная гимназия 18
Епифань. *Мелихова Раиса Григорьевна.* М. Епифаньская школа
Ефремов. *Клыков Сергей Николаевич.* Ф. ФМЛ 1
Тула. *Кожинин Сергей Павлович.* Ф. Лицей 2
Тула. *Постникова Галина Сергеевна.* Ф. Гимназия 2
Тюменская область
Урай. *Козловская Зоя Георгиевна.* Ф. Гимназия 1
Туртас. *Рахимов Хачат Мухаммедович.* М. Туртасская школа
Удмуртия
Сюмси. *Кокорина Людмила Николаевна.* М. Школа 1
Ульяновская область
Ульяновск. *Доброхотов Сергей Борисович.* Ф. Многопрофильный лицей 20
Ульяновск. *Орлова Софья Петровна.* М. Школа 40
Ульяновск. *Эдварс Анатолий Ростиславович.* Ф. Школа 68
Ульяновск. *Эдварс Ростислав Анатольевич.* М. Школа 68
Хабаровский край
Хабаровск. *Некрашевич Елена Александровна.* Ф. ЛИТ
Хакасия
Саяногорск. *Ломаковский Виктор Михайлович.* Ф. Школа 7
Шира. *Лебедева Татьяна Никитична.* М. Школа 4
Шира. *Логинова Елена Андреевна.* М. Школа 4
Шира. *Миронова Ольга Юрьевна.* М. Школа 4
Челябинская область
Озерск. *Ананьина Елена Вениаминовна.* М. ФМЛ 39
Снежинск. *Елькина Евгения Михайловна.* Ф. Гимназия 127
Челябинск. *Салдаева Лидия Алексеевна.* Ф. Школа 152
Челябинск. *Трифонов Михаил Анатольевич.* Ф. ФМЛ 31
Читинская область
Чита. *Лескова Галина Анатольевна.* М. Лицей ЧГУ
Ясногорск. *Басова Ольга Александровна.* Ф. Школа 1
Ясногорск. *Зарубина Наталья Иннокентьевна.* М. Школа 1
Ярославская область
Ростов. *Посевцов Евгений Федорович.* М. Гимназия 1
Углич. *Аверьев Владимир Михайлович.* Ф. ФМЛ
Ярославль. *Тюрина Екатерина Николаевна.* Ф. Школа 88

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Нет, нельзя. Предположим, репортаж корреспондента журнала «True-False» правдивый. Тогда последний из его собеседников не может быть ни рыцарем, ни лжецом.

2. Так как число и номер месяца не более чем двузначны, то путаница может возникнуть только в том случае, если у Торопыжки получилось трехзначное число без нуля, последние цифры которого 11 или 12, а первая цифра не больше 3. Поскольку в феврале 31-го числа не бывает, то нельзя однозначно восстановить даты, записанные в форме 111, 112, 211, 212, 311. Итак, в году нельзя будет различить 5 пар дат.

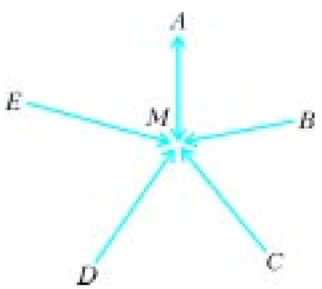


Рис. 1

3. Несложно построить пример, когда к одной норке подходят 5 тропинок (на рисунке 1 стрелки указывают направления прокладывания тропинок, AM = 100 см, BM = = 110 см, CM = 120 см, DM = 130 см, EM = 140 см, все острые углы при вершине M равны 72°).

Это число наибольшее. Если предположить, что к какой-либо норке S подходит более 5 тропинок, то мы придем к противоречию. Действительно, пусть с S соединены норки $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Тогда все лучи $SA_1, SA_2, \ldots, SA_6$ различны и делят полный угол с вершиной S на 6 частей. В треугольнике A_1SA_2 угол A_1SA_2 наибольший как противолежащий большей стороне A_1A_2. Следовательно, $\angle A_1SA_2 > 60°$ (убедитесь в этом). Аналогично в других треугольниках:

$$\angle A_2SA_3 > 60°, \ldots, \angle A_6SA_1 > 60° .$$

Но тогда сумма этих углов будет больше полного угла, чего не может быть.

4. *1-й способ.* Пусть Чичиков купил $Д$ душ по $К$ копеек за каждую. Из условия очевидным образом следуют такие три неравенства:

1) $К^2 > 1000$, 2) $Д^2 > 6000$, 3) $Д \times К \le 2500$.

Из первого неравенства следует, что $К \ge 32$, а из второго – что $Д \ge 78$. Если бы было $К \ge 33$, то тогда $Д \times К \ge 2574$, что противоречит третьему неравенству. Если бы было $Д \ge 79$, то тогда $Д \times К \ge 2528$, что также противоречит третьему неравенству. Поэтому осталась единственная возможность: $К$ = 32, $Д$ = 78, т.е. Чичиков купил 78 душ по 32 копейки за штуку. На всякий случай проверим: $78 \times 32 = 2496$, т.е. 25 рублей, действительно, хватит.

2-й способ. Раскроем шестую главу «Мертвых душ» и прочтем сцену торга Чичикова с Плюшкиным, где так прямо и говорится о 78 купленных беглых душах по 32 копейки за штуку. И даже общая сумма приводится: 24 рубля 96 копеек – Чичиков был в арифметике силен.

5. Замечаем, что диаметров окружности, оба конца которых красные, существует столько же, сколько диаметров, оба конца которых синие. Каждый прямоугольный треугольник, все вершины которого синие, имеет гипотенузу, являющуюся диаметром окружности с синими концами. Для каждого такого диаметра существует 48 прямоугольных треугольников, все вершины которых синие. То же самое справедливо и для прямоугольных треугольников, все вершины которых красные.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Для однозначных чисел y, очевидно, подходят варианты x = 1, y = 1; x = 4, y = 2; x = 9, y = 3. Докажем, что других решений нет. Пусть $z = \overline{x \ldots x}$ – n-значное число, n > 1. Имеем $x \ne 2$, 3, 7, 8, так как квадраты целых чисел на эти цифры не оканчиваются. Далее, y^2 при делении на 4 дает остаток 0 или 1. Поэтому $x \ne 1$, 5, 9 (остаток 3), 6 (остаток 2). Наконец, если x = 4, то $\frac{z}{4}$ тоже квадрат – и мы опять в условиях случая x = 1.

17. В плоскости ломаной введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть вершины ломаной в этой системе задаются такими координатами: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, $E(x_5, y_5)$, $F(x_6, y_6)$, $G(x_7, y_7)$, $H(x_8, y_8)$, $K(x_9, y_9)$, $L(x_{10}, y_{10})$. Воспользуемся тем, что абсцисса (ордината) середины отрезка находится как среднее арифметическое абсцисс (ординат) его концов. Запишем систему равенств, связывающих абсциссы вершин ломаной в соответствии с условием задачи:

$$x_1 + x_2 = x_6 + x_7 ,$$
$$x_2 + x_3 = x_7 + x_8 ,$$
$$x_3 + x_4 = x_8 + x_9 ,$$
$$x_4 + x_5 = x_9 + x_{10} .$$

Вычтя второе и четвертое уравнения этой системы из суммы первого и третьего, получим

$$x_5 + x_6 = x_1 + x_{10} .$$

Аналогично выводится уравнение для ординат:

$$y_5 + y_6 = y_1 + y_{10} .$$

Отсюда непосредственно следует утверждение задачи.

18. Обозначим $\text{НОД}(a,b) = x$, тогда $a = xy$, $b = xz$, $\text{НОД}(y,z) = 1$. Пусть также $\text{НОД}(x,z) = m$, тогда $x = mu$, $z = mv$, $\text{НОД}(u,v) = 1$. При этом $\text{НОД}(y,v) = \text{НОД}(y,m) = 1$. По условию задачи $x(y - z) = yz$, или

$$u(y - mv) = yv , \qquad (*)$$

откуда $uy = umv + yv$. Так как y и u взаимно просты с v, а правая часть последнего выражения делится на v, то v = 1. С учетом этого равенство $(*)$ перепишем в виде

$$(u-1)(y-m) = m .$$

Поскольку y и m взаимно просты, то отсюда получаем $u - 1 = m$, $y - m = 1$. Следовательно,

$$\text{НОД}(a,b) = x = mu = m(m+1) ,$$
$$\text{НОК}(a,b) = xyz = m(m+1) \cdot (m+1) \cdot m = \text{НОД}^2(a,b) .$$

19. Решение этой задачи см. в статье И.Акулича «Треугольники на шахматной доске» в «Кванте» №3.

20. Заметим, что наибольшая разность не может быть меньше 2 (клетка, где записано число 1, имеет четырех соседей). Покажем, что существует такая расстановка чисел, при которой эта разность в точности равна 2. Разобьем плоскость горизонтальной и вертикальной жирными линиями на 4 «угла»: юго-западный, северо-восточный, северо-западный и юго-восточный, как на рисунке 2.

…										…
…					8	9				…
…				8	6	7	9			…
…			8	6	4	5	7	9		…
…		8	6	4	2	3	5	7	9	…
…	9	7	5	3	1	2	4	6	8	…
…		9	7	5	3	4	6	8		…
…			9	7	5	6	8			…
…				9	7	8				…
…					9					…
…										…

Рис. 2

А далее просто опишем порядок заполнения числами каждого угла.
1) В угловую клетку юго-западного угла помещаем число 1, в две соседние с ней – числа 3, в три соседние с ними – числа 5 и т.д. Так как все последующие числа отличаются от предыдущих на 2, то разность между соседними числами не больше 2 (забегая вперед, скажем, что то же будет верно и для остальных углов). Также из принципа расстановки чисел следует, что каждое число $2m + 1$ (для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$) присутствует в углу ровно $m + 1$ раз.
2) В угловую клетку северо-восточного угла помещаем число 3, в две соседние с ней – числа 5, в три соседние с ними – числа 7 и т.д. Здесь каждое число $2m + 1$ присутствует в углу ровно m раз.
Всего, таким образом, в этих двух углах каждое число $2m + 1$ присутствует ровно $(m + 1) + m = 2m + 1$ раз.
3) Северо-западный и юго-восточный углы заполняются одинаково: в угловую клетку записывается число 2, в две соседние с ней – числа 4, в три соседние с ними – числа 6 и т.д. Здесь каждое число $2m$ (для всех $m = 1, 2, \ldots$) присутствует в углу ровно m раз, а в двух углах вместе – $2m$ раз.
Итак, каждое число встречается на доске столько раз, каково это число. Кроме того, в пределах каждого угла разность между соседними числами не превышает 2 (более того – она всюду как раз равна 2). Осталось убедиться, что разность между соседними числами в соседних углах (вдоль «швов») также не превышает 2. Оказывается, действительно не превышает – она всюду равна 1. В самом деле, рассмотрим, например, границу между юго-западным и северо-западным углами (луч, уходящий влево). В соответствии с правилами расстановки чисел, в клетках *под границей* справо налево записаны числа 1, 3, 5, …, а в клетках *над границей* – числа 2, 4, 6, …, т.е., действительно, числа в соседних клетках различаются на 1. Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных границ.

КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

1. $W_т = \dfrac{L\mathcal{E}^2}{2R_1(R_1+R_2)}$. **2.** $I_{max} = U_0\sqrt{\dfrac{C_1C_2}{L(C_1+C_2)}}$.

3. $U_{max} = I_0\dfrac{L_1+L_2}{\sqrt{C(\mu L_1+L_2)}}$. **4.** $Q_{max} = 4\pi\varepsilon_0 R\mathcal{E}$.

ТОЧКА ВНУТРИ ОКРУЖНОСТИ

1. $\dfrac{5\pi}{6}$ или $\pi - \arcsin\dfrac{1}{4}$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\dfrac{2pr}{\sqrt{p^2-4pr}}$.

4. $\dfrac{4}{3}R^2\sin\gamma$. **5.** $\dfrac{9}{200}p^2$. **6.** 4.

7. 55. **8.** $\sqrt{\dfrac{1110\left(2-\sqrt{3}\right)}{\pi}} < 10$. **9.** $\dfrac{153\sqrt{35}}{560}$.

LXVIII МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Математический праздник

6 класс

1. Валентин пробегает $50 \times 60 = 3000$ см за 100 с, т.е. его скорость равно 30 см/с, или 18 м/мин.
2. Количество рублей, потраченных Андреем при покупке билета у шофера, делится на 5; на 5 делится и общее количество потраченных в январе рублей. Значит, и в дни, когда билет покупался у кондуктора за 11 руб., общее количество потраченных денег делится на 5. Поэтому на 5 делится количество таких дней. Единственный подходящий вариант – 5 дней. Тогда билет покупался у шофера $(115 - 11\times 5)/15 = 4$ раза, а кружок был 9 раз.
3. а) Лиса должна разложить конфеты так: 10, 10 и 80. Если ей достанется кучка из 80 конфет, то медвежатам достанется поровну. Если ей достанется кучка из 10 конфет, то, чтобы уравнять доли медвежат, ей придется съесть еще 70 конфет.
Примечание. Это единственный возможный способ действий лисы. В самом деле, поскольку в итоге лиса съест 80 конфет, то медвежата съедят по $(100 - 80)/2 = 10$ конфет. Так как у одного из медвежат количество конфет не менялось, то ему досталось по жребию 10 конфет. Если кучка из 10 конфет лишь одна, то она по жребию может достаться лисе, и среди двух оставшихся не будет кучки из 10 конфет. Значит, имеются две такие кучки, а тогда в третьей – 80 конфет.
б) Нет, не может. В самом деле, в итоге медвежата съели поровну конфет, поэтому в сумме они съели четное число конфет. Так как 100 – четное число, то лиса также съела четное число конфет.
4. Можно разместить 16 «скобок» (рис.3), а 17 «скобок» занимают уже 102 клетки.

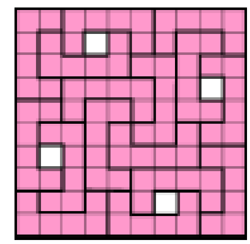


Рис. 3

5. Нет, не могут. Использованы 10 различных букв, поэтому каждая цифра обозначена какой-нибудь буквой, в том числе и ноль. Следовательно, произведение цифр какого-то (а значит, и другого) числа равно нулю, а тогда в записи обоих чисел есть ноль. В словах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ общие буквы М, Л и О, но М и Л стоят в начале чисел. Значит, ноль обозначен буквой О. Так как в числе МИХАЙЛО на конце ноль, то оно четное.
6. Того, про кого сказали, что он хоббит, для удобства назовем Бобом. Боб не согласился с тем, что он хоббит, следующий не согласился с ним, т.е. подтвердил, что Боб хоббит, и все говорящие через раз подтверждали или отрицали, что Боб хоббит.
а) Если пирующих было 9 (нечетное число), то на следующем круге каждый говорил противоположное тому, что сказал на предыдущем, так что все они хоббиты.
б) Так как 10 – четное число, то говорящие на каждом круге говорят одно и то же, поэтому хоббитов среди них нет. Тогда и Боб не хоббит, и его правый сосед солгал, т.е. он гоблин. Сам же Боб уличил гоблина во лжи, так что он эльф. Его сосед слева снова гоблин, и так далее – за столом сидят, чередуясь, пять гоблинов и пять эльфов.

7 класс

1. Во вторник Петя обменял свои рубли на 6 тугриков и получил за них в среду 36 рублей. В пятницу он обменял полученные рубли на 9 тугриков и получил за них в субботу 54 рубля.
2. а) Да, см. рис.4. б) Нечетное число не делится на четное, а потому не может стоять между числами одинаковой четности. Значит, нечетные числа стоят парами. Однако среди чисел 1, 2, …, 9 нечетных чисел пять, так что их нельзя разбить на пары.

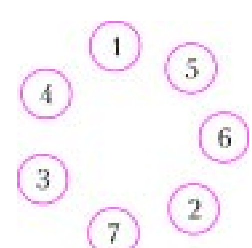


Рис. 4

3. Пример изображен на рисунке 5.
4. а) и б) Квадратик не мог иметь общий угол с прямоугольником, так как тогда периметр остался бы прежним или уменьшился, а площадь уменьшилась бы. Значит, квадрат

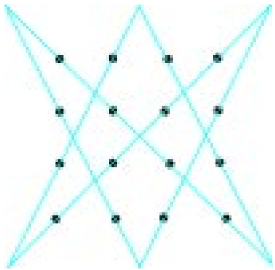


Рис. 5

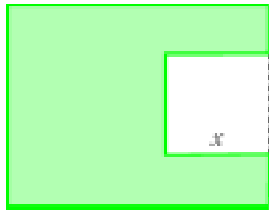


Рис. 6

примыкает только к одной из сторон прямоугольника (рис.6). Пусть сторона квадрата x. Тогда Таня, вырезав квадрат, уменьшает площадь фигуры на x^2, а периметр увеличивается на $2x$. По условию исходная площадь равна периметру полученной фигуры, а исходный периметр равен площади полученной фигуры. Значит, $x^2 = 2x$, откуда $x = 2$.

в) Пусть стороны прямоугольника m и n. Тогда из решения п. а) следует, $mn = 2m + 2n + 4$, что равносильно $(n-2)(m-2) = 8$.

Поскольку m и n превосходят 2, задача сводится к поиску разложений числа 8 на два натуральных множителя.

Получаем, что прямоугольники могли быть только такие, как на рисунке 7, т.е. 4×6 или 3×10.

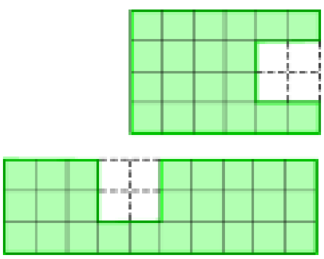


Рис. 7

5. $250 \times 984 + 615 = 2005 \times 13$. При $Л \le 7$ левая часть не превосходит

$$250 \times 800 + 1000 = 201000,$$

а правая не меньше $250 \times 102 = 204510$. Значит, Л = 8 или 9.

Если $ГОД \ge 124$, то число в правой части не меньше

$$2005 \times 124 = 248620,$$

а в левой части – не больше

$$250 \times 987 + 1000 = 247750.$$

Значит, $ГОД \le 123$ и Г = 1, а потому О = 0 или О = 2.

Выражение в правой части и число 250 делятся на 5, поэтому либо У = 5, либо У = 0. Но если У = 0, то правая часть оканчивается нулем и потому четна, а значит, Д четно. При этом О = 2 (так как $О \ne 0$), и минимальное значение Д равно 4, т.е. $ГОД \ge 124$. Противоречие. Значит, У = 5 и потому Д нечетно.

Для цифры Д возможны значения Д = 3, Д = 7 и Д = 9. При делении на 50 слева будет остаток 15 (так как Г = 1 и У = 5). Он должен быть таким же справа, откуда Д = 3.

Допустим, что О = 0. Тогда справа получаем $2005 \times 103 = 206515$, а значит, цифра Т четна (иначе в разряде десятков слева не получится единицы). При этом $Л \ge 8$, $Е \ge 2$ (остальные цифры заняты), и либо $М \ge 6$, либо М = 4 и $Т \ge 6$, и правая часть оказывается меньше левой. Значит, О = 2.

Имеем ГОД = 123. Случай Л = 8 не годится (слишком мало), остается Л = 9. По тем же соображениям $Е \ge 8$, а так как цифра 9 занята, то Е = 8. Далее легко видеть, что Т = 4 и М = 6.

6. Пусть x – число людей, вышедших на митинг. С одной стороны, каждой реформой недовольно ровно 48 жителей, и общее число «недовольств» равно $48 \times 5 = 240$. С другой стороны, каждый вышедший на митинг недоволен хотя бы тремя реформами. Поэтому $240 \ge 3x$, откуда $x \le 80$.

Приведем пример, когда на площадь выйдет ровно 80 человек. Выберем среди жителей острова 80 человек и разобьем их на пять групп по 16 человек. Пусть против первой реформы возражают люди из первых трех групп, против второй – люди из второй, третьей и четвертой групп, против третьей – из третьей, четвертой и пятой групп, против четвертой – из четвертой, пятой и первой групп, а против пятой – из пятой, первой и второй групп. Против каждой реформы возражают ровно $3 \times 16 = 48$ человек, т.е. условие задачи выполнено. На митинг выйдут все выбранные 80 человек.

Избранные задачи старших классов

1. Пусть разрез проходил вертикально. Проведем во всех квадратиках 1×1 вертикальные отрезки, соединяющие середины противоположных сторон (рис.8). При сгибании по линиям клеток эти отрезки накладываются друг на друга. Следовательно, разрезаются они и только они. Нетрудно подсчитать, что при этом получается 9 частей.

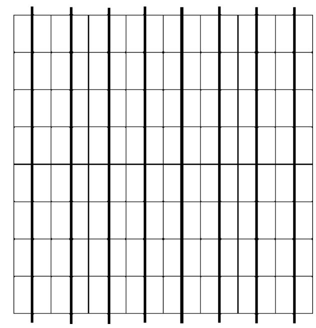


Рис. 8

2. Так как AA' и BB' – высоты, то треугольники $AA'B$, $AB'B$, $CA'H$ и $CB'H$ прямоугольные (рис. 9). Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине, то

$$XA' = 1/2\, AB = XB' \text{ и } YA' = 1/2\, CH = YB'.$$

Следовательно, точки X и Y лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $A'B'$.

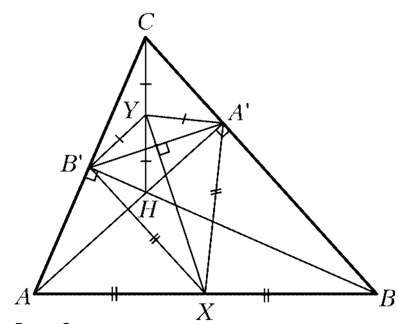


Рис. 9

3. Если после выкидывания каких-то двух соседних чисел сумма оставшихся нечетна, то их нельзя разбить на две группы с равной суммой. Если же такая сумма всегда четна, то суммы любых двух соседних чисел имеют одинаковую четность. Тогда числа, стоящие через одно, имеют одинаковую четность. Но так как на круге нечетное количество чисел, то все они одинаковой четности.

Если все числа нечетны, то сумма 2003 из них нечетна, и их нельзя разбить на две группы с равной суммой. Если же все числа четны, то уменьшим каждое из них вдвое. Если снова все числа четны, то снова уменьшим их вдвое, и т.д. На каком-то шаге получится нечетное число. По доказанному можно теперь выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся нельзя разбить на две группы с равной суммой. Остается выкинуть соответствующие два числа из исходного набора чисел.

4. Разобьем окружность с центром в точке O на шесть равных частей точками A, B, C, D, E и F. Проведем дугу окружности с центром в точке A радиуса AB от точки B до точки O (рис.10). Проведем аналогичные дуги с центрами в точках B, C, D, E, F. Каждую из полученных 6 частей круга разобьем на две равные части одним из способов, изображенных на рисунке.

Комментарий. Данная задача приоткрывает дверь в волшебный мир открытых проблем современной геометрии. Укажем некоторые направления возможного исследования:

1) Круг разделен на 12 равных частей так, что центр лежит на границе некоторых, но не всех частей. Верно ли, что части равны частям, получающимся при одном из разрезаний, указанных в решении?

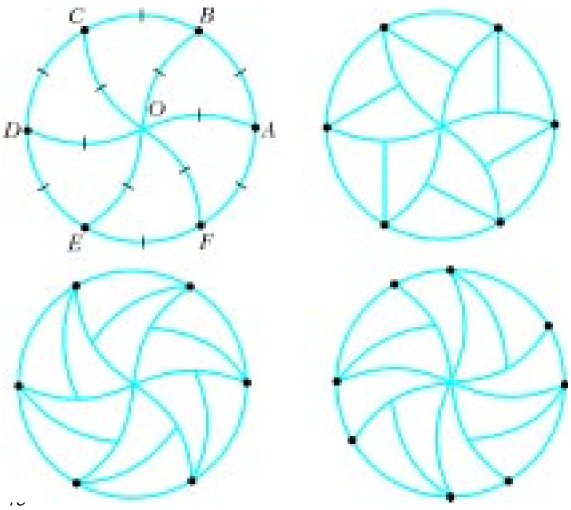


Рис. 10

2) При каких n круг можно разделить на n равных частей так, чтобы центр лежал на границе некоторых, но не всех частей? (Пример известен лишь при n вида $6k$, $k \geq 2$; недавно А.Канель-Белов доказал, что при $n = 2$ такое деление невозможно.)

3) Круг разделен на несколько равных частей. Верно ли, что диаметр каждой из частей (наибольшее из расстояний между ее точками) не меньше радиуса круга?

4) Можно ли разделить круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга лежал строго внутри (не на границе) одной из частей? Ответ на этот вопрос не известен не только для круга, но и для правильных n-угольников при $n > 4$.

5) Аналогичные вопросы можно поставить про шар в пространстве. Там не известно ни одного ответа (в том числе и на вопрос, аналогичный поставленному на олимпиаде).

5. Возьмем числа 1, 2 и 3. Сумма любых двух из них делится на третье, причем одно из этих чисел равно сумме двух других. Добавим к этим числам еще одно – их сумму. Затем к полученному набору добавим его сумму и т.д. Нетрудно показать, что на каждом шаге каждое из чисел набора делит сумму остальных. Проделав описанную операцию нужное количество раз, получим искомый набор: 1, 2, 3, 6, 12, 24,… …, 3×2^{2003}.

6. Пусть O_2 – центр окружности ω_2 (рис.11). Так как проведенные из точки C касательные к окружности ω_2 равны, то $\angle O_2CA = \angle O_2CB$. Поскольку эти углы вписаны в окружность ω_1, то равны ее дуги AO_2 и O_2B и стягивающие их хорды. Следовательно, точки A и B симметричны друг другу относительно линии центров.

7. Нет. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 20000 и 1/10000. Его площадь равна 1. Предположим, что его можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат. Тогда сторона этого квадрата равна 1. Разобьем катет длины 20000 на 1000 равных отрезков точками $A_0, A_1, \ldots, A_{1000}$. По принципу Дирихле какие-нибудь две из этих точек попадут в одну часть. Но расстояние между любыми двумя из перечисленных точек не меньше 20, а расстояние между любыми двумя точками квадрата не превосходит $\sqrt{2}$ – противоречие.

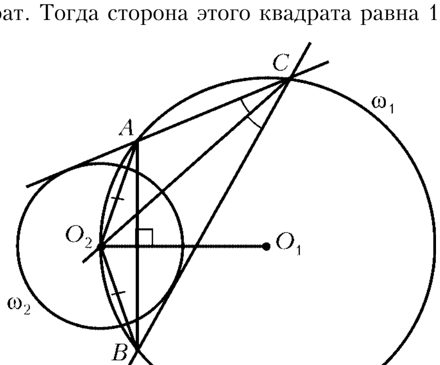


Рис. 11

Комментарий. В 1807 году венгерский математик В.Бойяи (Bolyai) доказал удивительную теорему: любые два многоугольника равной площади равносоставленны (т.е. один можно разрезать на несколько частей и собрать из них второй). Возникает естественный вопрос: как определить, какое минимальное количество частей требуется для двух конкретных многоугольников? Данная задача показывает нетривиальность вопроса – даже для треугольника и квадрата количество частей заранее неограниченно.

8. Так как у Сени и Жени получились одинаковые числа, то цифра, не выписанная Сеней, совпадает с цифрой, не выписанной Женей.

Пусть между точками на окружности, с которых Сеня и Женя начинали выписывать свои числа, расположена $k - 1$ цифра. Тогда из сказанного следует, что поворот окружности на k цифр совмещает каждую цифру с равной ей. Пусть m – наименьшее ненулевое число с таким свойством. Разделим n на m с остатком: $n = m \times q + r$. Легко видеть, что поворот на r цифр тоже переводит каждую цифру в равную ей. Так как $r < m$, то $r = 0$, т.е. n делится на m.

Теперь Сеня и Женя могут разрезать окружность на дуги, содержащие по m цифр, таким образом, что записанные на дугах цифры будут образовывать одинаковые числа.

Комментарий. В основе задачи лежит следующий факт. Пусть дана периодическая последовательность с минимальным периодом n, в которой содержатся два одинаковых участка длины $n - 1$. Тогда их начальные символы находятся на расстоянии, кратном n.

9. Да, существует. Это четырехугольник, у которого три угла по 45°, а четвертый 225° (тогда тангенсы всех его углов равны 1).

Комментарий. Можно показать, что условие задачи определяет углы четырехугольника однозначно.

10. Пусть точки имеют координаты $(x_1, P(x_1))$ и $(x_2, P(x_2))$, где $x_1 \neq x_2$. Тогда расстояние между ними равно

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (P(x_1) - P(x_2))^2} = |x_1 - x_2| \sqrt{1 + \left(\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}\right)^2}.$$

Поскольку $x_1^n - x_2^n$ при любом натуральном n делится на $x_1 - x_2$, а коэффициенты многочлена $P(x)$ целые, то $m = (P(x_1) - P(x_2))/(x_1 - x_2)$ – целое число. Из формулы для расстояния следует, что число $m^2 + 1$ рациональное, а значит, и целое (как корень из целого). Поскольку число вида $m^2 + 1$ является полным квадратом только при $m = 0$, то $P(x_1) = P(x_2)$, что равносильно утверждению задачи.

11. Нет, не всегда. Вот контрпример. Пусть в коробку $2 \times 2 \times 3$ помещены два бруска $1 \times 2 \times 3$. Немного уменьшим у одного из них измерение длины 3, а у другого – измерение длины 2. Так как у второго бруска одно измерение равно 3, высоту коробки уменьшить нельзя. Так как высоты обоих брусков больше 2, их можно ставить в коробку только вертикально. Ясно, что изменить взаимное расположение брусков нельзя. Поэтому горизонтальные размеры коробки также нельзя уменьшить.

Выясните самостоятельно, изменится ли ответ в задаче, если у каждого бруска уменьшаются два измерения из трех.

12. а) Так как $200 > 2^7$, то достаточно доказать следующее: если число цветов n, а число точек не меньше 2^n, то первый игрок может гарантировать себе выигрыш.

При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для $n - 1$ цвета, докажем его для n. Разобьем точки на два множества, состоящие не менее чем из 2^{n-1} точек каждое. В каждом из множеств покрасим отрезки в $n - 1$ цвет в соответствии с индуктивным предположением. Все отрезки, соединяющие точки из разных множеств, покрасим оставшимся цветом. Если в каком-то из двух множеств нет точек, покрашенных в последний цвет, то искомый отрезок существует по предположению индукции. Если же в обоих множествах есть точки последнего цвета, то соединяющий их отрезок – искомый.

б) Докажем, что утверждение верно уже для 121 точки. Занумеруем точки парами чисел (a, b), где a и b – числа от 1 до 11. При $k = 0,\ldots,9$ отрезки между точками вида (a_1, b_1) и (a_2, b_2), где $(a_2 - a_1) - k(b_2 - b_1) \vdots 11$, покрасим цветом $k + 1$. Если две точки соединены с третьей отрезками некоторого цвета, то между собой они соединены отрезком того же цвета. При этом для любых a_1, b_1, b_2 существует ровно одно a_2 такое, что отрезок между (a_1, b_1) и (a_2, b_2) покрашен в данный цвет. Поэтому для каждого цвета точки разбиваются на 11 множеств по 11 точек, все отрезки между которыми покрашены в данный цвет. Теперь покрасим оставшиеся отрезки произвольным образом. Как бы второй игрок ни покрасил точки, найдутся 12 точек одного цвета.

Рассмотрим разбиение на 11 множеств, соответствующее этому цвету. Найдутся две точки, попавшие в одно множество. Соединяющий их отрезок – искомый.

13. Рассмотрим на доске «большой» клетчатый квадрат со стороной 105 и разобьем его на 25 «малых» квадратов 21×21. Центр занумерованной клетки, находящийся на расстоянии менее 10 от центра некоторого малого квадрата, обязан находиться в этом малом квадрате, поэтому найдется хотя бы 25 клеток с числами. Наименьшее из них отличается от наибольшего более чем на 23. Соответствующие две клетки находятся на расстоянии менее 150, поскольку лежат в квадрате 105×105

14. Если $ABCD$ – вписанный четырехугольник, то он перейдет в равный четырехугольник за три операции. Любой допустимый четырехугольник перейдет в равный ему четырехугольник за 6 операций.

Действительно, пусть O – точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ – углы, образованные сторонами четырехугольника a, b, c, d с отрезками AO, BO, CO, DO (рис. 12). Нетрудно видеть, что при применении операции к четырехугольнику точка O остается на месте, стороны располагаются в таком порядке: d, b, c, a, и к ним соответственно примыкают углы α_8 и α_7, α_3 и α_4, α_5 и

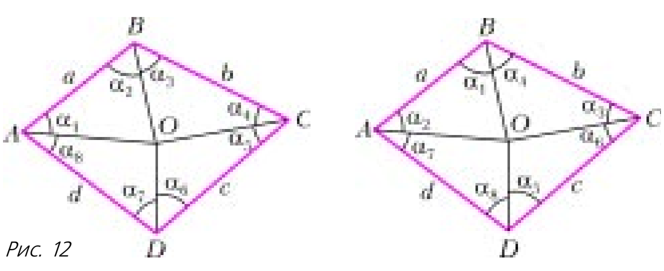


Рис. 12

α_6, α_2 и α_1, так что четырехугольник остается выпуклым. После применения трех операций стороны четырехугольника опять стоят в исходном порядке: a, b, c, d, а углы расположены как на рисунке 13.

Если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то O – центр описанной окружности, $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_6 + \alpha_7 = \alpha_5 + \alpha_8$, и за 3 операции четырехугольник перейдет в равный ему.

Для любого допустимого четырехугольника после 6 операций стороны и углы опять расположены в прежнем порядке (см. рис. 12).

Примечание. Если сразу оговорить, что допустимый четырехугольник – вписанный, то для ответа на первый пункт задачи достаточно проследить за сторонами четырехугольника, поскольку вписанный в данную окружность четырехугольник однозначно определяется длинами и порядком расположения сторон.

15. Пусть осталось $k \ge 1$ неразгаданных точек $c_{k,1}, \ldots, c_{k,k}$. Начертим на листе бумаги отрезок прямой l, не пересекающий отмеченный круг. На этом отрезке укажем такие $k + 1$ точек $a_{k,1}, \ldots, a_{k,k+1}$, что $a_{k,j}$ лежит строго между $a_{k,j-1}$ и $a_{k,j+1}$ для всех $j = 2, \ldots, k$.

Пусть Миша назвал для этих точек расстояния $d_{k,1}, \ldots, d_{k,k+1}$ соответственно. Найдем с помощью циркуля и линейки точки $b_{k,j+1}$ ($j = 1, \ldots, k$), которые лежат по ту же сторону от l, что и отмеченный круг, и отстоят от $a_{k,j}$ и $a_{k,j+1}$ на расстояния $d_{k,j}$ и $d_{k,j+1}$ соответственно (те индексы j, для которых это невозможно, мы пропускаем).

По принципу Дирихле найдутся две точки $a_{k,j}$ и $a_{k,m}$, для которых ближайшей из неразгаданных является одна и та же точка $c_{k,i}$. Нетрудно показать, что для любой точки из отрезка [$a_{k,j}$; $a_{k,m}$], и в частности для $a_{k,j+1}$, точка $c_{k,i}$ также является ближайшей из неразгаданных. Тогда $c_{k,i}$ совпадает с $b_{k,j+1}$. Таким образом, не более чем за $2k + 1$ попытку можно разгадать одну из неразгаданных точек.

При $n = 1$ единственная неразгаданная точка определяется описанным способом за $3 < (n+1)^2$ попытки. Предположим, что $n - 1$ неразгаданных точек можно разгадать менее чем за n^2 попыток, и пусть загадано n точек. Разгадаем одну из них вышеописанным способом не более чем за $2n + 1$ попытки. Тогда, с учетом предположения индукции, все точки могут быть разгаданы менее чем за $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ попыток. Утверждение доказано.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

8 класс

1. Нужно долить слой жидкости высотой 3 см.

2. См. таблицу:

t, °C	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p, 10^5 Па	1,12	1,06	1,02	1,00	1,00	1,00	1,02	1,05	1,11

3. $\dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{\rho r v S}{cm} \approx 0{,}5$ град/с.

9 класс

1. $F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5$ Н. **2.** $F = \mu(v - u)$.

3. $\dfrac{a_\alpha}{a_\gamma} \approx \sqrt[3]{\dfrac{1-\varepsilon}{2}} \approx 0{,}788$. **4.** $I_р = 6{,}6$ мА; $I_и = 13{,}2$ мА.

10 класс

1. $\alpha_m = \operatorname{arctg}\dfrac{\mu L}{2L - \mu h}$, при этом должно выполняться условие $\mu < \dfrac{L}{h}$; на ведущих колесах должен создаваться крутящий момент $M = \dfrac{\mu m g R L}{\sqrt{(2L - \mu h)^2 + (\mu L)^2}}$. **2.** $k_{общ} = k\sqrt{5}$.

3. $U_в = \mathscr{E}$ при $\mathscr{E} < U_0$ и $U_в = \dfrac{\mathscr{E}R_1 + U_0 R_2}{R_1 + R_2}$ при $\mathscr{E} > U_0$; $U_в = \mathscr{E}$.

4. $S = \dfrac{\pi R^2 H_1 (H_1 + 2H_2)}{H_2^2}$.

11 класс

1. $F = mg\left(1+\dfrac{m_2}{2m_1}\right) = 88$ Н. **2.** $t = \dfrac{1}{\sqrt{kg}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\mu_0}{v_0}\sqrt{\dfrac{g}{k}}\right)\right)$.

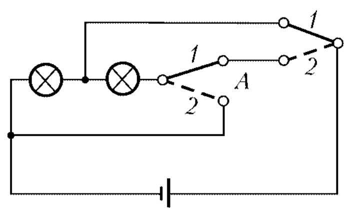
3. $\Delta T = \dfrac{T}{5}\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{\Delta p}{p}\right)^2} - 1\right)$.

4. $q_1 = C_1U = 4{,}5\cdot 10^{-6}$ Кл. **5.** $\mathcal{E} = (n-1)U$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $v_1 = 20$ м/с, $v_2 = 10$ м/с, $L = 500$ м.
2. $Q = 67$ кДж. **3.** См. рис.14.



№	A	B	Результат	
1	2	2	⨂	⨂
2	1	1	⊗	⨂
3	2	1	⊗	⊗
4	1	2	◐	◐

⨂ – *лампа не горит* ⊗ – *лампа горит*

◐ – *лампа горит в полнакала*

Рис. 14

9 класс

1. $R_п = \dfrac{nL}{\sqrt{n^2-1}}$, $R_з = \dfrac{L}{\sqrt{n^2-1}}$. **2.** $\alpha = 45°$.

3. $q = \dfrac{\pi D^2 d^2 T}{4V}\sqrt{\dfrac{2gH}{D^4 - d^4}} \approx 3090$ ведер в час (здесь $T = 1$ ч).

4. $v = \dfrac{\alpha n_0 d}{\tau}$.

10 класс

1. $a = \dfrac{2F - (M+m)g}{2M+m}$.

11 класс

1. $\mu > \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}35$. **2.** а) $K = \dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_3}{T_3} - \dfrac{Q_1+Q_3}{T_2} > 0$;

б) $K < 0$; в) $K = 0$. **3.** $L = \dfrac{g}{\omega^2}\left(1+\dfrac{m}{M}\right)$.

НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

6. 1) $|5x-1| + |3-7x| - 4 + \big||5x-1| - |3-7x| - 2\big| < 0$;

2) $4 - |5x-1| - |3-7x| + \big||5x-1| - |3-7x| - 2\big| < 0$;

3) $|5x-1| - |3-7x| - 2 + \big||5x-1| + |3-7x| - 4\big| < 0$;

4) $|3-7x| - |5x-1| + 2 + \big||5x-1| + |3-7x| - 4\big| < 0$;

5)–8) *Указание.* Приведите в совокупности неравенства к одному виду, далее воспользуйтесь упражнением 2 и утверждениями 4 и 5.

7. 1) $\left[\sqrt{6}; \infty\right)$; 2) $\left(-\infty; \sqrt{6}\right] \cup \{0\} \cup [1/4; \infty)$;

3) $\{-1\} \cup [3; \infty)$; 4) $(-3; 3) \cup (12; \infty)$;

5) $\left(-\infty; \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \{1\} \cup \left[\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}; \infty\right)$;

6) $\left[\dfrac{-7-\sqrt{33}}{2}; -3\right] \cup \{-2\}$.

8. 1) $(-\infty; -6) \cup (0; \infty)$; 2) $\{1\} \cup [2; 10]$;

3) $(-\infty; \infty)$; 4) $\{-1\}$; 5) $x \neq 2$.

9. $\varnothing$. **10.** $[6p+3; p-2]$ при $p \le -1$; $\varnothing$ при $-1 < p < 0$.

11. *Указание.* В координатной плоскости (u, v) постройте, например, два геометрических места точек: неравенства $\big|v + 2|u|\big| + |u| - 6 \le 0$ и системы

$$\begin{cases} (v+2u) + u - 6 \le 0, \\ (v-2u) - u - 6 \le 0, \\ -(v+2u) + u - 6 \le 0, \\ -(v-2u) - u - 6 \le 0 \end{cases}$$

и установите причины их несовпадения.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant. mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Е.Я.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»
Заказ №
Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91
При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10

БакинскиЙ ВУНДЕРКИНД

Мы уже рассказали о четырех шахматных вундеркиндах — Капабланке, Решевском, Спасском и Фишере. На очереди – Гарри Каспаров.

Отец научил Гарри играть в шахматы в пять лет. К сожалению, он умер слишком рано, и все функции по воспитанию мальчика легли на его мать Клару Каспарову. Пока у сына не появились профессиональные тренеры, мама занималась с ним сама. Ставила на доске позиции из шахматных книг и предлагала найти правильный ход.

Уже в 9 лет Каспаров стал перворазрядником. Вскоре Каспаров познакомился с мастером Александром Никитиным. Образовалось творческое содружество, успешно продолжавшееся вплоть до завоевания Гарри шахматной короны. В 1973 году Гарри, по рекомендации Никитина, приехал в Дубну на школу Ботвинника, где впервые увидел шахматного «патриарха». Дважды в год Ботвинник собирал своих учеников на десятидневные сборы. Ребята отчитывались, показывали свои партии, получали новые задания.

В 1975 году в Ленинграде состоялся турнир Дворцов пионеров (команды возглавляли известные гроссмейстеры), в котором Каспаров встретился в сеансах одновременной игры с двумя корифеями, Карповым и Корчным. Впервые сев за доску со своим историческим соперником, Гарри в равной позиции ошибся и не сумел устоять. А вот Корчной, наоборот, не без труда сделал ничью.

Общение с гроссмейстерами дало свои плоды: уже в начале 1976 года 12-летний школьник выиграл юношеский чемпионат СССР (до 18 лет!) – первый уникальный рекорд Каспарова. А через год 13-летний вундеркинд второй раз побеждает в юношеском чемпионате страны, причем с удивительным результатом – 8,5 очков из девяти!

Заметные успехи в юношеских соревнованиях дали право Каспарову выступить во всесоюзном отборочном турнире к очередному чемпионату страны, и летом 1978 года 15-летний Гарри завоевал единственную путевку непосредственно в высшую лигу.

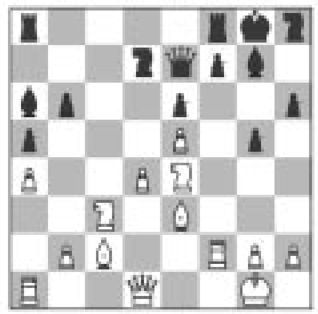
Каспаров – Палатник

Даугавпилс, 1978

Защита Алехина

1. e4 ♘f6 2. e5 ♘d5 3. d4 d6 4. ♘f3 g6 5. ♗c4 ♘b6 6. ♗b3 a5 7. a4 ♗g7 8. ♘g5 e6 9. f4 de 10. fe c5 11. 0-0 0-0 12. c3 ♘c6? 13. ♘e4! ♘d7 14. ♗e3! ♘e7 15. ♗g5! cd 16. cd b6 17. ♗h4 g5 18. ♗f2. Немедленная жертва слона в пользу черных – 18. ♗:g5 hg 19. ♘:g5 ♘:e5! 20. ♕h5 ♕:d4+ 21. ♔h1 ♕d3.

18... ♘g6 19. ♘be3 ♕e7 20. ♗c2 b6 21. ♗c3 ♗a6 22. ♖f2 ♘h8.



23. ♗:g5! hg 24. ♕h5 f5 25. ♘:g5 ♖f7. Возможен и другой пикантный финал: 25... ♖fd8 26. ♖:f5! ef 27. ♗b3+ ♔f8 28. ♘h7×.

26. ♗:f5! Жертва второго слона окончательно разрушает крепость черных. **26... ♖:f5.** Или 26... ef 27. ♘d5 ♕e8 28. e6 ♖f6 29. ♕h7+ ♔f8 30. e7+. **27. ♖:f5 ef 28. ♘d5! ♕e8 29. ♕h7+ ♔f8 30. ♕:f5+ ♔g8 31. ♕h7+ ♔f8 32. ♖a3! ♖c8 33. ♖f3+ ♘f6 34. h3! ♕g6 35. ♖:f6+ ♗:f6 36. ♘e6+ ♔e8 37. ♘:f6+. Черные сдались.** Одно из самых ярких произведений юного Каспарова!

Итак, 46-й чемпионат СССР в Тбилиси. Во втором туре вничью закончилась партия Багиров – Каспаров, двух тогдашних бакинцев. «Настанет время, – пророчески изрек Багиров, – и все будут считать ничью с этим мальчиком за благо...». В своем первом чемпионате страны Каспаров выиграл четыре партии, столько же проиграл и с 50-ю процентами занял девятое место.

Весной 1979 года Каспаров впервые участвовал в международном турнире в югославском городе Баня-Лука. Прорваться юноше на Запад было сложно, но тут помог Ботвинник, убедивший чиновников в большом шахматном потенциале своего протеже. Набрав 11,5 очков из 15 (без поражений), Гарри выиграл свой первый международный турнир, причем с отрывом в два очка – на полтора перевыполнил гроссмейстерскую норму (но пока ему было присвоено только звание международного мастера)

В очередном первенстве страны Каспаров разделил «бронзу» с Юрием Балашовым и в 16 лет дебютировал в составе сборной страны на чемпионате Европы. Результат замечательный: из шести партий пять побед, одна лучше другой, и всего одна ничья. В апреле 1980 года состоялось важное событие – у себя на родине в Баку Каспаров выиграл еще один международный турнир, попутно завоевав второй гроссмейстерский балл.

На юношеском чемпионате мира в Дортмунде преимущество единственного гроссмейстера было заметным, и он легко победил.

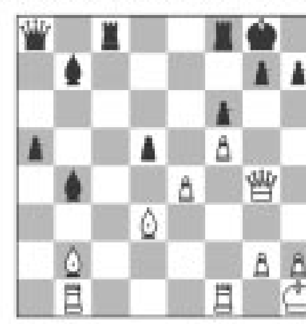
В тот год наш герой завоевал сразу три золотые медали: в составе сборной страны на первенстве Европы, за успешное окончание школы и на чемпионате мира в Дортмунде. Лучшую победу в Германии Каспаров одержал над Акессоном, своим ровесником из Швеции.

Каспаров – Акессон

Дортмунд, 1980

Новоиндийская защита

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 b6 4. a3 ♗b7 5. ♘c3 d5 6. cd ♘:d5 7. e3 ♗e7 8. ♗b5+ c6 9. ♗d3 ♘d7 10. e4 ♘:c3 11. bc c5 12. 0-0 cd. Современная теория рекомендует 12...0-0. **13. cd 0-0 14. ♕e2 ♖c8 15. ♗b2.** При отсутствии пешек «с» слон здесь сразу берет под прицел неприятельского короля. **15... ♕c7 16. ♕e3 ♘f6 17. ♘e5 b5 18. f4 ♕b6 19. ♔h1 b4 20. ab ♗:b4 21. ♖ab1 a5 22. ♕e2 ♕a7 23. f5 ♕a8**



24. d5! ed 25. ♘g4 ♘:g4 26. ♕:g4 f6.

27. ♗:f6! После 27. e5 ♗c3 28. e6 у белых достаточная компенсация за пожертвованную пешку, но трудно удержаться от такого соблазнительного удара. Теперь на доске происходит настоящая буря. **27... ♖:f6 28. e5 ♖h6 29. f6 ♖c7 30. e6! ♕d8 31. e7 ♖:e7 32. fe ♕:e7 33. ♖be1! ♕d8 34. ♕f5 ♕b8 35. ♕f7+ ♔h8 36. ♖c7. Черные сдались.**

В феврале 1981 года в матче-турнире четырех сборных страны (первая, вторая, молодежная и ветеранов) Каспаров впервые встретился на равных с действующим чемпионом мира Анатолием Карповым. Обе партии закончились вничью, но Каспаров победил на первой доске, и это была уже серьезная заявка на будущее!

Е. Гик

Индекс
70465 – по каталогу "Роспечать"

Университеты мира на монетах и банкнотах

Университеты Кракова и Вроцлава удостоились появления
на монетах Польши и Германии.
В 1964 году монеты с профилем Казимира Великого были изданы в Польше
к 600-летию образования Краковского университета. В 1999 году ему же
была посвящена монета с портретом королевы Ядвиги.
В 1911 году серебряная монета Германии была посвящена 100-летию
образования университета Бреслау (Вроцлава).

(Подробнее об этих университетах - внутри журнала.)